

Calculatrices interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

Exercice I

Dans cet exercice, il est inutile de reproduire tous les calculs sur la copie.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Q1.** Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable puis déterminer une matrice D diagonale réelle et une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$
- Q2.** Déterminer une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2 = A$
- Q3.** Déterminer, pour tout entier naturel non nul n , les 9 coefficients de la matrice A^n en utilisant la matrice de passage P
- Q4.** Donner le polynôme minimal de la matrice A et en déduire, à l'aide d'une division euclidienne de polynômes, la matrice A^n comme une combinaison linéaire des matrices A et I_3 .

Exercice II

On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Q5.** L'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- Q6.** Démontrer que l'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Q7.** Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier que :

$$\exists \rho > 0, \quad \forall \lambda \in]0, \rho[, \quad M - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$$

Démontrer que l'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- Q8. Application :**

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que les matrices $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique.

A l'aide des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.

- Q9.** Démontrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Problème

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire que l'on notera $\langle \mid \rangle$ de norme associée $\|\cdot\|$.

Un endomorphisme u de E est une similitude de E lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout vecteur x de E , $\|u(x)\| = k\|x\|$. On dira que u est une similitude de rapport k .

On notera $\text{Sim}(E)$, l'ensemble des similitudes de E et $O(E)$ désigne l'ensemble des isométries vectorielles de E .

L'objectif de ce problème est de définir et de caractériser les similitudes d'un espace euclidien.

Partie I - Exemples, propriétés

Q10. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice d'une similitude u dont on précisera le rapport.

Q11. Interprétation géométrique avec la similitude u de la question précédente :

Le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les trois points $M(2, 1)$, $N(4, 1)$, $P(4, 2)$ et on définit les points M' , N' , P' par les relations

$$u(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}, \quad u(\overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{ON'}, \quad u(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'}$$

Représenter les triangles MNP et $M'N'P'$ et comparer leurs aires.

Q12. Démontrer que tout élément de $\text{Sim}(E)$ est bijectif et établir que $\text{Sim}(E)$, muni de la loi de composition, est un groupe.

Q13. On rappelle qu'une homothétie vectorielle de E est une application de la forme αid_E .

Démontrer que $u \in \text{Sim}(E)$, si et seulement si, u est la composée d'une homothétie vectorielle non nulle de E et d'un élément de $O(E)$

Q14. Exemple :

Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de la matrice d'une homothétie vectorielle et de la matrice d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$ dont on précisera la nature.

Q15. Soient u un endomorphisme de E , $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$

Démontrer que u est une isométrie vectorielle de E , si et seulement si, $A^\top A = I_n$

Caractériser par une relation matricielle les similitudes de rapport k .

Q16. Exemple :

Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de

$\mathbb{R}^3$ d'une similitude u dont on donnera le rapport.

Donner la matrice de la similitude u^{-1} .

Vérifier que, pour tout élément f de $O(E)$, $u^{-1} \circ f \circ u \in O(E)$

Q17. On appelle sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$, l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| = r$.

Démontrer que si u est un endomorphisme de E tel que l'image par u de toute sphère de E de centre 0 est une sphère de E de centre 0, alors u est une similitude de E . On

pourra remarquer que pour y vecteur non nul, $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1$.

Partie II - Assertions équivalentes

Q18. Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

En déduire que u est une similitude de rapport k , si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = k^2 \langle x | y \rangle$$

Q19. Démontrer que, si u est une similitude de rapport k , alors, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E

$$\langle x | y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x) | u(y) \rangle = 0$$

On dit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité.

Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

Démontrer que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e_i + e_j | e_i - e_j \rangle = 0$, puis que : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$

On note k la valeur commune prise par tous les $\|u(e_i)\|$.

Après avoir justifié que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|u(e_i)\| = k \|e_i\|$ démontrer que u est une similitude de rapport k .

Q20. Soit u une application de E dans E (non supposée linéaire) telle qu'il existe un réel $k > 0$ pour lequel :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = k^2 \langle x | y \rangle$$

Démontrer que u est un endomorphisme de E , puis que u est une similitude de E .