A. Préliminaires sur les matrices symétriques

1) • $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.
On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel : $(X, Y) \mapsto (X \mid Y) = X^\top Y$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
Selon le théorème spectral, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $\Delta = Q^\top SQ = Q^{-1}SQ$ est diagonale. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de Δ. On notera $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul.

$$X^\top SX = X^\top Q\Delta Q^\top X = (Q^\top X)^\top \Delta(Q^\top X)$$

Si on note $Q^\top X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on a alors

$$X^\top SX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant \lambda_{i_0} y_{i_0}^2 > 0$$

où i_0 est tel que $y_{i_0} \neq 0$ (un tel i_0 existe car $X \neq 0$ et $Q^\top$ est inversible). On en déduit que $X^\top SX > 0$.

• $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ainsi $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^\top SX > 0$
Soit λ une valeur propre de S. On considère X un vecteur colonne propre de S associé à λ. En particulier $X \neq 0$.
On a $X^\top SX = X^\top(\lambda X) = \lambda X^\top X = \lambda\|X\|^2$
ainsi $\lambda\|X\|^2 > 0$ or $\|X\|^2 > 0$ car $X \neq 0$ donc $\lambda > 0$

Finalement $\boxed{S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^\top SX > 0}$

2) Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $Q^\top SQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ sont les valeur propres de S comptées avec multiplicité.
On pose $R = Q\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})Q^\top$.
On a

$$R^\top R = Q\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})Q^\top Q\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})Q^\top = Q\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})^2 Q^\top = S$$

car $Q^\top Q = I_n$
De plus $R \in GL_n(\mathbb{R})$ car elle est semblable à $\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ dont 0 n'est pas valeur propre.
Ainsi $\boxed{\text{pour tout } S \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \text{ il existe } R \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } S = R^\top R}$
Réciproquement soit $R \in GL_n(\mathbb{R})$. Posons $S = R^\top R$.
On a $S^\top = R^\top \left(R^\top\right)^\top = R^\top R = S$ donc $R^\top R \in S_n(\mathbb{R})$
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul.
On a $X^\top SX = (RX)^\top RX = \|RX\|^2$
or $R \in GL_n(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$, d'où RX est non nul et ainsi $\|RX\| > 0$
$\boxed{\text{On a montré que pour tout } R \in GL_n(\mathbb{R}),\ R^\top R \in S_n^{++}(\mathbb{R})}$

3) Soit S et $T \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $t \in [0,1]$. Montrons que $S_t = tS + (1-t)T \in S_n^{+}(\mathbb{R})$.

- On sait que $S_n(\mathbb{R})$ est convexe car c'est un sous espace vectoriel. Cela implique que $S_t \in S_n(\mathbb{R})$.
- Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

$$X^\top \left(tS + (1-t)T\right) X = tX^\top SX + (1-t)X^\top TX$$

Si $t \neq 0$, alors $X^\top \left(tS + (1-t)T\right) X \geqslant tX^\top SX > 0$
et si $t = 0$, alors $X^\top \left(tS + (1-t)T\right) X = (1-t)X^\top TX > 0$

Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble } S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est convexe}}$

B. Autres préliminaires

4) Posons $\Phi : (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}, a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i \in E$.

D'après l'énoncé $\mathrm{Conv}(K) = \Phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$

Les applications notées : $\varphi_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ définies par $\varphi_i : (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \mapsto \lambda_i$ pour $i \in [\![1, n+1]\!]$ et $S : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ définie par $S : (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k$ sont continues car linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie.

Or $\mathcal{H} = \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n+1} \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^+)\right) \bigcap S^{-1}(\{1\})$

donc c'est un fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$ par intersection et car une image réciproque par une application continue d'un fermé est un fermé de l'ensemble de départ.

De plus $\mathcal{H}$ est borné car $\mathcal{H} \subset [0,1]^{n+1}$.

Ainsi $\mathcal{H}$ est une partie compacte car elle est fermée et bornée et que $\mathbb{R}^{n+1}$ est de dimension finie.

Par produit de compacts, $\mathcal{H} \times K^{n+1}$ est un compact.

Notons de plus que l'application Φ est continue car elle est bilinéaire.

On obtient que $\boxed{\mathrm{Conv}(K) \text{ est un sous-ensemble compact de } E}$ car l'image d'un compact par une application continue est compact.

5) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormée de E.

Si $n = 1$, alors g est une homothétie de rapport noté λ et on a $\forall x \in E$, $\|g(x)\| = |\lambda| \, \|x\|$

Si $n > 1$. Soit alors $i \in \{2, \ldots, n\}$.

On a $(e_1 + e_i | e_1 - e_i) = ||e_1||^2 - ||e_i||^2 = 0$ donc

$$0 = (g(e_1 + e_i)|g(e_1 - e_i)) = (g(e_1) + g(e_i)|g(e_1) - g(e_i)) = \|g(e_1)\|^2 - \|g(e_i)\|^2$$

On note $k = \|g(e_1)\| \geqslant 0$. Alors, pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, $||g(e_i)||^2 = (g(e_i)|g(e_i)) = k^2$.

De plus, pour tout $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $(g(e_i)|g(e_j)) = 0$ car $(e_i|e_j) = 0$

Soit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ où les x_i sont réels.

On a

$$\|g(x)\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i) \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i)\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i x_j (g(e_i)|g(e_j)) = \|g(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 k^2 = k^2\|x\|^2$$

On a montré que $\boxed{\text{il existe un nombre réel positif } k \text{ tel que pour tout } x \in E,\ \|g(x)\| = k\|x\|}$

Si $k = 0$ alors g est la composée de l'homothétie de rapport 0 et l'identité.

Si $k \neq 0$, alors g est la composée de l'homothétie de rapport k et de $\frac{1}{k}g$

or $\frac{1}{k}g \in \mathscr{L}(E)$ et $\frac{1}{k}g$ conserve la norme donc il s'agit d'un endomorphisme orthogonal.

Dans tous les cas, $\boxed{g \text{ est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal}}$

6) D'après le cours, on sait que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Pour la compacité, il suffit d'établir le caractère fermé-borné car $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. On a $A^\top A = I_n$ donc $\|A\|_2 = \sqrt{(A|A)} = \sqrt{n}$ où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne.

Ainsi $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $\psi : A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto A^\top A$ est continue car chaque coefficient de $A^\top A$ est polynomial en les coefficients de A.

Donc $O_n(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(\{I_n\})$ est une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

d'où $\boxed{\text{le groupe orthogonal } O_n(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe compact du groupe linéaire } GL_n(\mathbb{R})}$

C. Quelques propriétés de la compacité

7) Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ convergente. On note ℓ sa limite.

Pour $\alpha = \frac{\varepsilon}{3}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $||x_{\varphi(n)} - \ell|| \leqslant \alpha$. En particulier

$$\varepsilon \leqslant ||x_{\varphi(N+1)} - x_{\varphi(N)}|| = ||x_{\varphi(N+1)} - \ell + \ell - x_{\varphi(N)}|| \leqslant ||x_{\varphi(N+1)} - \ell|| + ||x_{\varphi(N+1)} - \ell|| \leqslant 2\alpha$$

Cela implique que $\varepsilon \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{3}$ ce qui est absurde.

Ainsi $\boxed{\text{cette suite n'admet aucune suite extraite convergente}}$

8) Par l'absurde, on suppose que la propriété à démontrer est fausse. Il existe donc un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $p \geqslant 0$ et tous éléments $x_1, \ldots, x_p$ de K, $K \not\subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} B(x_k, \varepsilon)$.

On va construire par récurrence une suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ à valeurs dans K telle que pour tout entier naturel $n \neq p$, on ait $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$.

On considère un élément x_1 de K quelconque. Un tel élément existe car $K \not\subset B(0_E, \varepsilon)$ donc $K \neq \emptyset$.

En utilisant encore la propriété, $K \not\subset B(x_1, \varepsilon)$. Donc il existe $x_2 \in K \setminus B(x_1, \varepsilon)$. En particulier $||x_2 - x_1|| \geqslant \varepsilon$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose construits $x_1, \dots, x_k \in K$ tel que pour tout entier naturel $n \neq p \in [\![1, k]\!]$, on ait $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$

On a alors, grâce a la propriété que $K \not\subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Il existe donc $x_{k+1} \in K$ tel que pour tout entier naturel $n \in [\![1, k]\!]$, $\|x_{k+1} - x_n\| \geqslant \varepsilon$.

On a donc construit $x_1, \dots, x_{k+1} \in K$ tel que pour tout entier naturel $n \neq p \in [\![1, k+1]\!]$, on ait $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$.

On construit ainsi une suite $(x_k)_{k \geqslant 1}$ d'éléments de K qui vérifie pour tout entiers naturels $n \neq p$, on a $\|x_p - x_n\| \geqslant \varepsilon$.

D'après la question 7) cette suite n'admet aucune suite extraite convergente. Or il s'agit d'une suite à valeurs dans le compact K, ce qui est absurde.

Ainsi pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p \geqslant 0$ et $x_1, \dots, x_p$ éléments de K tels que $K \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$.

9) Par l'absurde, on suppose que pour tout réel $\alpha > 0$, il existe $x \in K$, tel que pour tout $i \in I$, on ait $B(x, \alpha) \not\subset \Omega_i$.

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$, ceci nous fournit $x_n \in K$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $B(x_n, 1/n) \not\subset \Omega_i$.

La suite (x_n) à valeurs dans le compact K admet une extractrice qui $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une valeur d'adhérence $\ell \in K$.

Comme $K \subset \displaystyle\bigcup_{i \in I} \Omega_i$, ceci nous fournit $j \in I$ tel que $\ell \in \Omega_j$.

Comme Ω_j est un ouvert, ceci nous fournit $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset \Omega_j$.

Comme $(x_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ, ceci nous fournit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_1$, $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leqslant r/3$

Comme $\left(\dfrac{1}{\varphi(n)}\right)$ converge vers 0, ceci nous fournit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N_2$, $\frac{1}{\varphi(n)} \leqslant r/3$

On pose $p = \max(\varphi(N_1), \varphi(N_2))$

et comme $2r/3 < r$, on a d'après l'inégalité triangulaire : $B\left(x_p, \frac{1}{p}\right) \subset B(\ell, r)$

ce qui absurde par construction de de la suite (x_n).

Ainsi il existe un réel noté $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i.

Par la question précédente il existe un entier $p \geqslant 0$ et $x_1, \dots, x_p$ éléments de K tels que $K \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{p} B(x_j, \varepsilon)$

Pour $j \in [\![1, p]\!]$, ce qui est fait au dessus nous fournit $i_j \in I$ tel que $B(x_j, \alpha) \subset \Omega_{i_j}$

d'où $\boxed{\text{l'existence d'une sous-famille finie } (\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p}) \text{ de la famille } (\Omega_i)_{i \in I} \text{ telle que } K \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}}$

10) Notons pour $i \in I$, $O_i = E \setminus F_i$ qui est un ouvert de E par complémentaire et on a $K \subset \displaystyle\bigcup_{i \in I} O_i$

D'après la question précédente il existe une sous famille finie $(O_{i_1}, \dots, O_{i_p})$ telle que $K \subset \displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} O_{i_k}$.

On a donc $K \bigcap \left(\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} \right) = \emptyset$

Comme pour tout $i \in I$, on a $F_i \subset K$: $\boxed{\text{la sous famille finie } (F_{i_1}, \dots, F_{i_p}) \text{ vérifie } \bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \emptyset}$

D. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

11) Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons : $\begin{cases} (i) & N_G(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}^+ \textit{ (aspect bien défini et positivité)} \\ (ii) & N_G(x+y) \leqslant N_G(x) + N_G(y) \textit{ (inégalité triangulaire)} \\ (iii) & N_G(\lambda x) = |\lambda| \cdot N_G(x) \textit{ (homogénéité)} \\ (iv) & N_G(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \textit{ (caractère défini)} \end{cases}$

Pour (i) : L'application $u \in \mathscr{L}(E) \longmapsto u(x) \in E$ est linéaire et $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, donc elle est continue.

De plus G est compact et non vide (car $G \ni id_E$).

D'où l'existence dans $\mathbb{R}^+$ de $N_G(x) = \max_{u \in G} \|u(x)\|$.

Pour (ii) : Soit $u \in G$. On a : $\|u(x+y)\| = \|u(x) + u(y)\| \leqslant \|u(x)\| + \|u(y)\|$.

donc $\|u(x+y)\| \leqslant N_G(x) + N_G(y)$

Comme c'est vrai pour tout $u \in G$, on a bien $N_G(x+y) \leqslant N_G(x) + N_G(y)$

Pour (iii) : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.

$$\begin{aligned} N_G(x) &= \max_{u \in G} \|u(\lambda x)\| \\ &= \sup_{u \in G} \|u(\lambda x)\| \\ &= \sup_{u \in G} \|\lambda u(x)\| \\ &= \sup_{u \in G} |\lambda| \|u(x)\| \\ &= |\lambda| \sup_{u \in G} \|u(x)\| \text{ car } |\lambda| \geqslant 0 \\ &= |\lambda| N_G(x) \end{aligned}$$

D'où l'égalité.

Pour (iv) : On suppose $N_G(x) = 0$.

Donc $\forall u \in G,\ \|u(x)\| = 0$ en particulier pour $u = \mathrm{id}_E$ car G sous groupe de $GL(E)$.

donc $x = 0$

On a montré que $\boxed{N_G \text{ est bien définie et que c'est une norme sur } E}$

12)
- Soit $u \in G$ et $x \in E$.
  L'application $v \longmapsto v \circ u$ est une bijection du groupe G dans lui-même de bijection réciproque $v \longmapsto v \circ u^{-1}$
  donc $N_G(u(x)) = \max_{v \in G} \|v \circ u(x)\| = \max_{w \in G} \|w(x)\| = N_G(x)$.
  Ainsi $\boxed{\text{pour tous } u \in G \text{ et } x \in E,\ N_G(u(x)) = N_G(x)}$ (P_1)
- Soit $x, y \in E$ tel que x est non nul.
  - $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\lambda x = y$.
    Pour tout $u \in G$, on a $\|u(x+y)\| = (1+\lambda) \cdot \|u(x)\|$ car $1 + \lambda \geqslant 0$
    En faisant comme pour l'homogénéité, on obtient : $N_G(x+y) = (1+\lambda) N_G(x)$
    donc $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$ car $\lambda \geqslant 0$ et N_G est une norme

- $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$.
  Soit $v \in G$ tel que $N_G(x+y) = \|v(x+y)\|$

  $$N_G(x)+N_G(y) = N_G(x+y) = ||v(x+y)|| = ||v(x)+v(y)|| \leqslant ||v(x)||+||v(y)|| \leqslant N_G(x)+N_G(y)$$

  donc $v(x)$ et $v(y)$ sont colinéaires de même sens donc $x = v^{-1}(v(x))$ et $y = v^{-1}(v(y))$ également car v^{-1} est linéaire.

Finalement pour tous $x, y \in E$ avec x non nul,
$\boxed{N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y) \text{ si et seulement si } \lambda x = y \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}^+}$ (P_2)

13) Soit $x \in K$.
Comme K est stable par u, on montre par récurrence sur i que $u^i(x) \in K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
Ainsi x_n est le barycentre du système pondéré $((u^i(x), 1))_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ à coefficients positifs, comme K est convexe, on a $x_n \in K$.
Ainsi comme K est compact :
$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ admet une valeur d'adhérence } a \text{ dans } K}$$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage, on a $\|u(x_n) - x_n\| = \frac{1}{n}\|u^n(x) - x\|$
donc $\boxed{\|u(x_n) - x_n\| \leqslant \dfrac{\delta(K)}{n}}$ car x et $u^n(x) \in K$
Notons φ une extractrice telle que $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers a
donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\|u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \leqslant \dfrac{\delta(K)}{\varphi(n)}$ et de plus $\dfrac{\delta(K)}{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
Comme l'application $y \mapsto u(y) - y$ est continue (linéaire et E est de dimension finie), alors $\left(u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\right)$ converge vers $u(a)-a$. Par passage aux limites dans les inégalités larges et continuité de la norme, $||u(a) - a|| = 0$, ainsi $\boxed{\text{l'élément } a \text{ de } K \text{ est un point fixe de } u}$

14) Soit $x \in K$. Comme $u(x)$ est le barycentre de $((u_i(x), 1))_{1\leqslant i\leqslant r}$ qui est une famille de points de K pondérés par des masses positives, alors $u(x) \in K$ car K convexe. Ainsi $\boxed{K \text{ est stable par } u}$
Comme $u \in \mathscr{L}(E)$, par combinaison linéaire,
on peut appliquer 13, pour en déduire : $\boxed{\text{l'existence de } a \in K \text{ tel que } u(a) = a}$

15) Comme $u(a) = a$, on a $N_G\left(\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = N_G\left(u(a)\right) = N_G(a)$
et d'après (P_1), on a $N_G(u_i(a)) = N_G(a)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$
d'où $\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a)) = \dfrac{r}{r}N_G(a)$. On a bien $\boxed{N_G\left(\dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))}$
Ainsi par homogénéité : $N_G\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$ car $r \geqslant 0$
Soit $j \in \{1, \ldots, r\}$. Avec ce qui précède et en utilisant l'inégalité triangulaire pour N_G, on a :
$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) \leqslant N_G(u_j(a))+N_G\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r} N_G\left(u_i(a)\right) = N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{r} u_i(a)\right)$$

donc on a bien $\boxed{N_G\left(u_j(a)+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^r u_i(a)\right)=N_G(u_j(a))+N_G\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^r u_i(a)\right)}$

16) Soit $j\in\{1,\dots,r\}$.

On suppose dans un premier temps que $u_j(a)$ est un vecteur non nul de E.

Par (P_2) et la question précédente, on obtient l'existence de $\lambda_j\geqslant 0$ tel que $\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^r u_i(a)=\lambda_j u_j(a)$.

On en déduit que $ru(x)=\lambda_j u_j(a)+u_j(a)$ ce qui permet de conclure dans ce cas car $r>0$.

Dans un deuxième temps, si $u_j(a)$ est le vecteur nul de E alors $a=0$ car $u_j\in GL(E)$ et en prenant $\lambda_j=1$ on a $u(a)=0$ et $\dfrac{\lambda_j+1}{r}u_j(a)=0$ car u et u_j linéaires

$\boxed{\text{pour tout } j\in\{1,\dots,r\}\text{, on a l'existence d'un nombre réel } \lambda_j\geqslant 0 \text{ tel que } u(a)=\dfrac{\lambda_j+1}{r}u_j(a)}$

dans tous les cas.

17) En prenant les images par N_G des deux membres de l'inégalité précédente on obtient pour tout $j\in[\![1,r]\!]$:

$$N_G(a)=\left|\frac{\lambda_j+1}{r}\right|N_G(a)=\frac{\lambda_j+1}{r}N_G(a)$$

donc si $a\neq 0_E$, on en déduit que $\lambda_j=r-1$ et donc $a=u(a)=u_j(a)$.

Si $a=0_E$, le résultat est évident.

Ainsi $\boxed{a \text{ est un point fixe de tous les endomorphismes } u_i \text{ où } i\in\{1,\dots,r\}}$

18) On note pour $u\in G$, $F_u=\{a\in K\ ,\ u(a)=a\}$.

Comme pour $u\in G$, $u-\mathrm{id}_E$ est continue (linéaire en dimension finie),

alors $F_u=(u-\mathrm{id}_E)^{-1}(\{0\})$ est un fermé de K (image réciproque de fermé par une application continue)

Comme K est un fermé de E (car compact de E) et $F_u\subset K$, alors F_u est un fermé de E

Remarque : on aurait pu aussi remarquer que $F_u=K\cap\{a\in E\ ,\ u(a)=a\}$

On suppose par l'absurde que : $\bigcap_{u\in G}F_u=\emptyset$, la question 10, nous fournit $p\in\mathbb{N}^*$ et $u_1,\dots,u_p\in G$ tels que $\bigcap_{i=1}^p F_{u_i}=\emptyset$

Ceci est contradictoire avec la question précédente ainsi $\bigcap_{u\in G}F_u\neq\emptyset$.

Ce qui nous donne l'existence de $a\in\bigcap_{u\in G}F_u$.

Ainsi $\boxed{\text{il existe bien } a\in K \text{ tel que pour tout } u\in G,\ u(a)=a}$

E. Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

19) Soit $A\in G$. Montrons : $\begin{cases}(a)\quad \rho_A:\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\longrightarrow\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\(b)\quad \rho_A \text{ linéaire}\\(c)\quad \rho_A \text{ bijective}\end{cases}$

Pour (a) C'est évident

Pour (b) On vérifie par calcul dans l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que :

$$\forall M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \rho_A(\lambda M + N) = \lambda \rho_A(M) + \rho_A(N)$$

Pour (c) Soit $B, C \in G$.

Par calcul dans l'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a vérifie facilement que $\rho_B \circ \rho_C = \rho_{CB}$ car $B^\top C^\top = (CB)^\top$

On a également $\rho_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ et l'existence A^{-1} car $G \subset GL_n(\mathbb{R})$.

donc $\rho_A \circ \rho_{A^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\rho_{A^{-1}} \circ \rho_A = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$

Ce qui prouve que ρ_A est bijective

On a montré que $\boxed{\rho_A \in GL(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))}$

L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \to & \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \\ (A, B) & \mapsto & (M \mapsto A^T M B) \end{array} \right.$ est bilinéaire (par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la transposition) donc continue car $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

On en déduit que $\Lambda : A \mapsto \rho_A$ est continue de G vers $GL(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme $H = \Lambda(G)$, alors H est un compact en tant qu'image d'un compact par une application continue.

Pour tous $A, B \in G$,

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \rho_{AB}(M) = B^T A^T M A B = \rho_B(\rho_A(M))$$

donc $\rho_{AB} = \rho_B \circ \rho_A$.

Ainsi Λ est un morphisme de groupes de G muni de la loi $(A, B) \mapsto BA$ vers $GL(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, donc son image $\Lambda(G)$ est un sous-groupe de $GL(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.

On a bien montré que $\boxed{H \text{ est un sous-groupe compact de } GL(M_n(\mathbb{R}))}$

20) On a $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ donc en utilisant la réciproque de 2, on a $\Delta \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.

L'application notée $\Phi :\ A \in G \longmapsto \rho_A(I_n) = A^\top A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est continue d'après l'énoncé

ainsi $\Delta = \Phi(G)$ est compact car G l'est.

d'où $\boxed{\Delta \text{ est un compact contenu dans } S_n^{++}(\mathbb{R})}$

Il suffit d'établir que : $\left\{ \begin{array}{ll} (i) & K = \mathrm{Conv}(\Delta) \text{ est compact (oui avec 4.)} \\ (ii) & K \subset S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ (iii) & K \text{ stable par les éléments } H \end{array} \right.$

Pour (ii) **:** D'après 3, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui de plus contient Δ

Comme K est le plus petit convexe contenant Δ alors $K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Remarque : le plus petit convexe contenant une partie est bien défini car $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est convexe et que l'intersection d'une famille de convexes est convexe.*

Pour (iii) **:** Soit $M \in K$ et $\rho_A \in H$ où $A \in G$. Montrons $\rho_A(M) \in K$.

D'après ce qui est admis en introduction et comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2, on peut écrire $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i B_i$

où $(B_1, \ldots, B_{n^2+1}) \in \Delta^{n^2+1}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n^2+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i = 1$

Par linéarité de ρ_A : $\rho_A(M) = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \rho_A(B_i)$

Pour $1 \leqslant i \leqslant n^2+1$, on peut écrire $B_i = (C_i)^\top C_i$ où $C_i \in G$, ainsi $\rho_A(B_i) = A^\top (C_i)^\top C_i A = (C_i A)^\top C_i A$

or $C_i A \in G$ car G est un groupe et donc $\rho_A(B_i) \in \Delta$

d'où $\rho_A(M) = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \rho_A(B_i) \in \mathrm{Conv}(\Delta) = K$.

On a montré que

$\boxed{K \text{ est un sous-ensemble compact de } S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ qui est stable par tous les éléments de } H}$

21) Pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Markov-Kakutani au convexe compact K de l'espace euclidien $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est stable par tous élément du sous groupe compact H de $GL(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$, il suffit d'établir que K est non vide. C'est bien la cas car comme $I_n \in G$, on a $\{I_n{}^\top I_n\} \subset \Delta \subset K$.

Le théorème nous fournit alors $a \in K$, tel que $\forall u \in H,\ u(a) = a$

ou encore : $\boxed{\text{il existe } M \in K \text{ tel que pour tout } A \in G,\ \rho_A(M) = M}$

Comme $M \in K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$, 2 nous fournit $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $M = N^\top N$.

Soit $A \in G$. On a alors $A^\top N^\top N A = N^\top N$ car $\rho_A(M) = M$.

Alors on a $(NAN^{-1})^\top NAN^{-1} = (N^{-1})^\top A^\top N^\top NAN^{-1} = \left(N^\top\right)^{-1} N^\top N N^{-1} = I_n$

On en déduit $\boxed{\text{l'existence de } N \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tel que pour tout } A \in G,\ NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})}$

Considérons l'application $\psi_N : A \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto NAN^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$

On vérifie que ψ_N est un morphisme de groupes de $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ vers lui-même.

On note $G_1 = \psi_N(G)$ qui est donc un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ car G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$

Comme $\psi_N(G) \subset O_n(\mathbb{R})$ alors G_1 est un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$. On remarque de plus que ψ_N est bijectif de bijection réciproque $\psi_{N^{-1}} : A \in GL_n(\mathbb{R}) \longmapsto N^{-1}AN \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $G = \psi_{N^{-1}}(G_1)$.

Finalement $\boxed{\text{il existe un sous-groupe } G_1 \text{ de } O_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } G = N^{-1}G_1N = \{N^{-1}BN/\ B \in G_1\}}$

22) Comme σ_P est une isométrie vectorielle et comme la base canonique est orthonormale (au sens du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}$) on a $S \in O_n(\mathbb{R})$. Donc $S \in K$ et ainsi $NSN^{-1} \in NKN^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$.

Soient $x, y \in E$ tels que $x \perp y$. Supposons x non nul et posons $P = Vect(x)^\perp$. C'est un hyperplan contenant y. On a alors

$$(g \circ \sigma_p \circ g^{-1})(g(x)) = g(-x) = -g(x) \text{ et } (g \circ \sigma_p \circ g^{-1})(g(y)) - g(y)$$

Comme $g \circ \sigma_p \circ g^{-1}$ conserve le produit scalaire (car sa matrice dans la base canonique est orthogonale) on a :

$$(g(x)|g(y)) = \left((g \circ \sigma_p \circ g^{-1})(g(x)) \middle| (g \circ \sigma_p \circ g^{-1})(g(y))\right) = (-g(x)|g(y))$$

Ainsi $2(g(x)|g(y)) = 0$.

Le cas où $x = 0$ est trivial.

Ainsi g conserve l'orthogonalité et 5) nous fournit $k \geqslant 0$ tel que $N = k\Omega$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, et $k \neq 0$ car $N \neq 0$ car $N \in GL_n(\mathbb{R})$ et $n > 0$.

donc Ω est tel que $\Omega K \Omega^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$. 21 nous fournit G_1 sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $K = \Omega^{-1} G_1 \Omega \subset O_n(\mathbb{R})$

on en déduit $\boxed{K = O_n(\mathbb{R})}$