REMARQUES DU FUTUR :
LES QUESTIONS 13 ET 14 N'ONT RIEN A VOIR AVEC LA NORME NG ET POURRAIENT FIGURER EN DEBUT DE PARTIE
DE PLUS ON DEMANDE DEUX FOIS LA MEME DEMO (L'ARGUMENT DE CONVEXITE) ET ON PEUT VOIR CET ARGUMENT EN 13 COMME UN CAS PARTICULIER DE 14 (IL FAUT JUSTE CONSTATER QUE LES PUISSANCES DE u SONT DANS G)

- Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$ dont le produit scalaire est noté $(.|.)$ et la norme euclidienne est notée $\|.\|$. On note $L(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $GL(E)$ le groupe des automorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^i l'endomorphisme $u \circ u \circ \cdots \circ u$ (i fois) avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$ (identité). L'ensemble vide est noté $\emptyset$.

- On rappelle qu'un sous-ensemble C de E est *convexe* si pour tous x, y dans C et tout $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. De plus, pour toute famille $a_1, \ldots, a_p$ d'éléments de C convexe et tous nombres réels positifs ou nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dont la somme est égale à 1, on a $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \in C$.

- Si F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle *enveloppe convexe* de F, et on note $\mathrm{C}onv(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant F.

- On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbf{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

  On admet que $\mathrm{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ où $x_1, \ldots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$.

- L'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes est noté $M_{n,m}(\mathbf{R})$. On notera en particulier $M_n(\mathbf{R}) = M_{n,n}(\mathbf{R})$. La matrice transposée d'une matrice A est notée $A^\top$. La trace de A est notée $\mathrm{tr}(A)$.

- On note $GL_n(\mathbf{R})$ le groupe linéaire des matrices de $M_n(\mathbf{R})$ inversibles et $O_n(\mathbf{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.

*L*es parties A, B et C sont indépendantes

A. Préliminaires sur les matrices symétriques

On note $S_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$ formé des matrices symétriques.
On rappelle q'une matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$ *non nul*, on a $X^\top S X > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1 ▷ (Question de cours) Redémontrer qu'une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbf{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbf{R}^{+*}$.

2 ▷ En déduire que pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, il existe $R \in GL_n(\mathbf{R})$ tel que $S = R^\top R$. Réciproquement montrer que pour tout $R \in GL_n(\mathbf{R})$, $R^\top R \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

3 ▷ Montrer que l'ensemble $S_n^{++}(\mathbf{R})$ est convexe.

B. Autres préliminaires

Les trois questions de cette partie sont mutuellement indépendantes.

4 ▷ Soit K un sous-ensemble compact de E et $\mathrm{Conv}(K)$ son enveloppe convexe. On rappelle que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbf{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Définir une application Φ de $\mathbf{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ dans E telle que $\mathrm{Conv}(K) = \Phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$. En déduire que $\mathrm{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de E.

5 ▷ On désigne par g un endomorphisme de E tel que pour tous x, y dans E, $(x|y) = 0$ implique $(g(x)|g(y)) = 0$.
Montrer qu'il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$.
On pourra utiliser une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ et considérer les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$.
En déduire que g est la composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.

6 ▷ On se place dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire canonique défini par $(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$. (On ne demande pas de vérifier que c'est bien un produit scalaire).
Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe compact du groupe linéaire $GL_n(\mathbf{R})$.

C. Quelques propriétés de la compacité

7 ▷ Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$.

Montrer que cette suite n'admet aucune valeur d'adhérence.

Soit K un sous-ensemble compact de E. On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon r.

8 ▷ Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p \geq 0$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de K tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^{p} B(x_k, \varepsilon)$. (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune valeur d'adhérence.)

On considère une famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles ouverts de E, I étant un ensemble quelconque, telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.

9 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i. (Même indication que pour la question précédente). En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

10 ▷ Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide : $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$.
Montrer qu'il existe une sous famille finie $(F_{i_1}, \dots, F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \emptyset$.

D. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un sous-ensemble non vide, compact et *convexe* de E. Pour tout $x \in E$, on note $N_G(x) = \max\limits_{u \in G} \|u(x)\|$.

11 ▷ Montrer que N_G est bien définie et que c'est une norme sur E.

12 ▷ Montrer en outre que N_G vérifie les deux propriétés suivantes :

(P_1) pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$;

(P_2) pour tous $x, y \in E$ avec x non nul, $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbf{R}^+$.

13 ▷ On considère un élément $u \in L(E)$, et on suppose que K est stable par u, c'est à dire que $u(K)$ est inclus dans K. Pour tout $x \in K$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)$. Enfin, on appelle *diamètre* de K le réel $\delta(K) = \sup\limits_{x,y \in K} \|x - y\|$ qui est bien défini car K est borné.

Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est à valeurs dans K et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergeant vers un élément a de K. Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\|u(x_n) - x_n\| \leq \dfrac{\delta(K)}{n}$. En déduire que l'élément a de K est un point fixe de u.

On suppose maintenant que le compact non vide convexe K est stable par tous les éléments de G. Soit $r \geq 1$ un entier, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ des éléments de G et $u = \dfrac{1}{r} \displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i$.

14 ▷ Montrer que K est stable par u et en déduire l'existence de $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

15 ▷ Montrer que $N_G\left(\dfrac{1}{r} \displaystyle\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \dfrac{1}{r} \displaystyle\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$. En déduire que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} u_i(a)\right)$$

16 ▷ En déduire, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geq 0$ tel que $u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.

17 ▷ Déduire de la question précédente que a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1, \ldots, r\}$.

18 ▷ En utilisant le résultat de la question 10, montrer qu'il existe $a \in K$ tel que pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

E. Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbf{R})$

Comme à la question 6), on se place dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire défini par $(A|B) = \operatorname{tr}(A^\top B)$.
On rappelle que $GL_n(\mathbf{R})$ désigne le groupe linéaire et $O_n(\mathbf{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.
Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbf{R})$. Si $A \in G$, on définit l'application ρ_A de $M_n(\mathbf{R})$ dans lui même par la formule $\rho_A(M) = A^\top M A$.
On note $H = \{\rho_A \mid A \in G\}$, $\Delta = \{A^\top A \mid A \in G\}$ et $K = \operatorname{Conv}(\Delta)$.

19 ▷ Montrer que $\rho_A \in GL(M_n(\mathbf{R}))$ et que H est un sous-groupe compact de $GL(M_n(\mathbf{R}))$.

20 ▷ Montrer que Δ est un compact contenu dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$ et que K est un sous-ensemble compact de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ qui est stable par tous les éléments de H.

21 ▷ Montrer qu'il existe $M \in K$ tel que pour tout $A \in G$, $\rho_A(M) = M$. En déduire l'existence de $N \in GL_n(\mathbf{R})$ tel que pour tout $A \in G$, $NAN^{-1} \in O_n(\mathbf{R})$. En déduire enfin qu'il existe un sous-groupe G_1 de $O_n(\mathbf{R})$ tel que $G = N^{-1}G_1N = \{N^{-1}BN/\ B \in G_1\}$.

Soit K un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbf{R})$ qui contient $O_n(\mathbf{R})$, et $N \in GL_n(\mathbf{R})$ tel que $NKN^{-1} \subset O_n(\mathbf{R})$. On désigne par g l'automorphisme de $\mathbf{R}^n$ de matrice N dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$, par P un hyperplan de $\mathbf{R}^n$, par σ_P la symétrie orthogonale par rapport à P et par S la matrice de cette dernière dans la base canonique.

22 ▷ Montrer que $NSN^{-1} \in O_n(\mathbf{R})$. En déduire que g conserve l'orthogonalité et en déduire K.