MP **2025 – 2026**

Exercices de mathématiques

Partie I

CHAPITRE 1

Séries numériques

1 Applications du cours

A Séries à termes positifs, comparaisons du terme général, équivalents

□ **Exercice 1** Déterminer la nature de la série de terme général : $u_n = \dfrac{2^n \ln n}{\operatorname{sh}(n)}$.

□ **Exercice 2** Déterminer la nature des séries de terme général : $u_n = \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+2)!}$.

□ **Exercice 3** Déterminer la nature des séries de terme général : $u_n = \dfrac{n^{2n}}{(2n)!}$, $v_n = \dfrac{n^n}{e^n n!}$

□ **Exercice 4**

1) Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = n \displaystyle\int_0^1 (t(1-t))^n \mathrm{d}t$.

2) Déterminer la nature de la série $v_n = n \displaystyle\int_0^1 (t(1-t))^n f(t) \mathrm{d}t$, où f est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$.

□ **Exercice 5** Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} \frac{1}{1 + t\sqrt{t}} \mathrm{d}t$.

□ **Exercice 6** Déterminer la nature des séries de terme général :

$a)$ $\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$	$b)$ $\dfrac{1}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n} n}$	$c)$ $\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$
$d)$ $\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}$	$e)$ $2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$	$f)$ $\dfrac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$
$g)$ $(1 + \sqrt{n})^{-n}$	$h)$ $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$i)$ $\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+3n}$
$j)$ $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$	$k)$ $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$	$l)$ $\dfrac{(n)^{\ln n}}{(\ln n)^{\ln n}}$

□ **Exercice 7** Déterminer, en fonction de la valeur des paramètres, la nature des séries de terme général :

$$\begin{array}{llll} a) & \operatorname{ch}^{\alpha} n - \operatorname{sh}^{\alpha} n \quad (\alpha \in \mathbf{R}) & b) & \dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n^{\alpha}} \quad (a > 0 \text{ et } \alpha \in \mathbf{R}) \\ c) & \left[\ln\left(\operatorname{sh}\left(n^{\alpha}\right)\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}} - n \quad (\alpha > 0) & d) & (\ln(2n+1))^{\alpha} - (\ln(2n))^{\alpha} \ (\alpha \in \mathbf{R}) \\ e) & \dfrac{a^n \, 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n} \quad (a > 0 \text{ et } b > 0) & f) & \left(\cos\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right)^n \ (\alpha > 0) \end{array}$$

□ **Exercice 8** Étudier la nature des séries de terme général :

$$\begin{array}{llllll} a) & \dfrac{1}{(\ln 2)^2 + \ldots + (\ln n)^2} & b) & e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{n}} & c) & \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n - 1 \\ d) & \ln(\operatorname{th} \mathrm{n}) & e) & \arcsin \frac{2n}{4n^2+1} & f) & n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} \\ g) & (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\sqrt{n}} & h) & \left(\arctan \sqrt{n}\right)^{-\ln n} & i) & \left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right]^n - 1 \\ j) & \sin \pi (2 - \sqrt{3})^n & k) & \sin \pi (2 + \sqrt{3})^n & & \end{array}$$

□ **Exercice 9** Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $w_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(p+n)^2}$. Justifier que la suite $(w_n)_{n \geqslant 0}$ est bien définie et déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

□ **Exercice 10** Nature de la série de terme général u_n avec : $u_n = \sqrt[3]{n^4 + n^3} \displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) \mathrm{d}x$.

□ **Exercice 11** Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes dans $[0, +\infty[$.

1) Montrer que $\sum u_n v_n$ est aussi convergente.
2) On suppose de plus que les suites u_n et v_n sont à valeurs dans $]0, +\infty[$. Montrer que $\sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$ est convergente.

□ **Exercice 12** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes dans $[0, +\infty[$. Déterminer la nature de la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$.

□ **Exercice 13**

1) Soit une série $\sum u_n$ à termes positifs convergente. Montrer que $\sum u_n^3$ est convergente.
2) On suppose que $\forall n \geqslant 0$, $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$, et que $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ sont convergentes. Montrer que $\sum a_n b_n$ est convergente.
3) On suppose que $\forall n \geqslant 0$, $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$, et que $\sum a_n^3$ et $\sum b_n^3$ sont convergentes. Montrer que $\sum (a_n + b_n)^3$ est convergente.

□ **Exercice 14** Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de réels positifs.

1) Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge. Que dire de la réciproque ?
2) Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum u_n^2$ converge. Que dire de la réciproque ?

□ **Exercice 15** Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose : $\forall \ n \in \mathbf{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}$.

1) Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.
2) Montrer que si la série $\sum v_n$ converge et si la suite (u_n) est majorée, alors $\sum u_n$ converge.
3) Si la série $\sum v_n$ converge, peut-on affirmer que $\sum u_n$ converge ?

B Comparaison à une intégrale

□ **Exercice 16** (Séries de Bertrand)
Nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ en discutant sur les paramètres réels α et β.

□ **Exercice 17** Donner un équivalent de $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

□ **Exercice 18** Déterminer, en fonction du paramètre, la nature des séries de terme général :

$$a)\quad n^a \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \quad (a \in \mathbf{R}) \qquad b)\quad n^a \ln(n!) \quad (a \in \mathbf{R}) \qquad c)\quad n^a \sum_{k=1}^{n} (\ln k)^2 \quad (a \in \mathbf{R})$$

□ **Exercice 19**

1) Soit $\alpha > 1$. On pose $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$. Montrer que $R_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

2) Si $\alpha < 1$, déterminer un équivalent simple de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^\alpha}$

□ **Exercice 20** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=n}^{n^2} \dfrac{1}{p\ln(p)}$.

C Théorème des séries alternées

□ **Exercice 21** Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

□ **Exercice 22** Déterminer une approximation rationnelle par excès et une approximation rationnelle par défaut de $\frac{1}{e}$ à 10^{-2} près.

□ **Exercice 23** Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \left| \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{n(-1)^k}{k} \right| \leqslant 1$.

□ **Exercice 24** Etablir l'existence de $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ pour tout x dans $[0,1]$.

Montrer que : $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left| S(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

D Convergence absolue

□ **Exercice 25** Déterminer la nature des séries de terme général :

$$a)\quad \frac{n^\alpha \sin(n)}{2^n} \qquad b)\quad \frac{n\cos(n)}{(\ln n)^n}$$

E Usage de développements asymptotiques

□ **Exercice 26** Déterminer la nature des séries de terme général

$$a)\quad \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}} \qquad b)\quad \sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) \qquad c)\quad \tan\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)$$

$$d)\quad \frac{(-1)^n}{n+\cos(n)} \qquad e)\quad \frac{(-1)^n}{n+e^{in}} \qquad f)\quad (-1)^n\sqrt{n}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

$$g)\quad \exp\left((-1)^n \frac{\ln n}{n}\right) - 1 \qquad h)\quad \cos\left(\pi n^2 \ln\frac{n-1}{n}\right) \qquad i)\quad \ln\left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$$

□ **Exercice 27** Dans les deux cas suivants, déterminer des réels a et b pour que la série soit convergente et calculer alors la somme

$$u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} \qquad v_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

□ **Exercice 28** Déterminer, en discutant selon la valeur du paramètre, la nature de la série de terme général :

$$a)\quad \ln\left(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)\ (a>0) \qquad b)\quad \frac{(-1)^n}{n^\alpha(\sqrt{n}+(-1)^n)}\ (\alpha\in\mathbf{R}) \qquad c)\quad \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)-1\ (\alpha>0)$$

□ **Exercice 29** Soit $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+2})$. Étudier le convergence absolue et la convergence de la série $\sum u_n$.

F Sommation des relations de comparaison

□ **Exercice 30** Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \left(\operatorname{ch}\frac{1}{n}\right)^{-n^3}$.

1) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2) Déterminer un équivalent de $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ quand n tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 31** Soit $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n puis donner un équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

□ **Exercice 32** (Développement asymptotique de la série harmonique)
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on définit : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et $u_n = S_n - \ln(n)$.

1) Effectuer un développement limité à l'ordre 2 sur l'échelle des puissances de $\frac{1}{n}$ de $u_n - u_{n-1}$. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel que l'on notera γ puis que

$$S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

2) En utilisant le principe de sommation des relations de comparaisons, trouver un équivalent simple, noté a_n, de $u_n - \gamma$.
3) Soit $v_n = u_n - \gamma - a_n$. Trouver, par le même principe, un équivalent de v_n.
En déduire que

$$S_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

□ **Exercice 33** On considère la suite récurrente : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - u_n^2 \\ u_0 \in]0,1[\end{cases}$

1) Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite .
2) On pose : $a_n = \frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}$ pour $n \geqslant 1$.
Déterminer un réel α pour que la suite (a_n) converge vers une limite ℓ non nulle. En déduire un équivalent simple de u_n. On notera v_n cet équivalent.
3) On pose : $b_n = a_n - \ell$ pour $n \geqslant 1$.
Déterminer un équivalent simple de $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, en déduire un développement asymptotique de u_n à deux termes plus un reste.

G Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange

□ **Exercice 34** Étude de la convergence et calcul de la somme de la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$, où x est un réel.

□ **Exercice 35** Étude de la convergence et calcul de la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

H Calculs de sommes

□ **Exercice 36** Calculer la somme des séries de terme général

$$a)\ \frac{4n-3}{n(n^2-4)} \qquad b)\ \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \qquad c)\ \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$d)\ \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right) \qquad e)\ \frac{1}{n^3-n} \qquad f)\ \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$$

□ **Exercice 37** Soit θ un réel. Calculer la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{n^2-2n\cos(\theta)-\sin^2(\theta)}$

□ **Exercice 38** Montrer que pour $x>0$, $\arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$. En déduire la somme de la série $\sum \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

□ **Exercice 39** Soit $u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$. Justifier la convergence de la série de terme général u_n. Calculer la somme en décomposant en éléments simples, et en se ramenant à la somme d'une autre série.

□ **Exercice 40** Soit $a>1$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_1^a (\ln t)^n \mathrm{d}t$.

1) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2) Calculer sa somme par deux méthodes : l'une utilisant un théorème d'intégration termes à termes d'une série de fonctions, l'autre non.

I Etude d'une suite à l'aide d'une série

□ **Exercice 41** Soit $a_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-t}\sin^{2n}(t)\mathrm{d}t$.

1) Déterminer une relation entre a_n et a_{n-1}.
2) Soit $b_n = V_n - V_{n-1}$ avec $V_n = \ln(n^\gamma a_n)$. Déterminer une valeur de γ pour que la série de terme général b_n soit convergente.
3) En déduire un équivalent de a_n.

□ **Exercice 42** Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle à termes positifs ou nuls. Soit u_0 un réel strictement positif. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par : $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{R}$ si et seulement si la série $\sum a_n$ converge .

2 Exercices plus élaborés

A Séries à termes positifs, comparaisons du terme général, équivalents

□ **Exercice 43** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin t}{1+t}\mathrm{d}t$. Déterminer en fonction de α la nature de $\sum u_n$.

□ **Exercice 44**

1) Calculer $\sin(\arccos x)$ pour $x \in [-1,1]$.
2) Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \arccos\left(\frac{n^\alpha}{1+n^\alpha}\right)$

□ **Exercice 45** Etudier la nature de la série de terme général : $u_n = \arccos\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

□ **Exercice 46** Étudier, en fonction de $a \geqslant 0$, la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \ln x \mathrm{d}x - \ln(n+a)$.

B Comparaison à une intégrale

□ **Exercice 47** Déterminer en fonction de $\alpha \in \mathbf{R}$ la nature de la série de terme général $u_n = \frac{S_n}{n^\alpha}$ où $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\ln k)^2$.

□ **Exercice 48** Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(1+k)}{\sqrt{k}}$.

□ **Exercice 49** Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k)}$. Justifier son existence et déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

C Théorème des séries alternées

□ **Exercice 50** Nature de la série de terme général : $u_n = \left|\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}\right|^{\ln n}$

□ **Exercice 51**

1) Soit $\sum u_n$ une série réelle convergente.

   Démontrer que si elle est à termes positifs, ou si elle relève du théorème des séries alternées, alors $\sum u_n^3$ est une série réelle convergente.

2) Soit la série $\sum u_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad , \quad u_{3n} = \frac{2}{\sqrt[3]{n}} \quad , \quad u_{3n+1} = u_{3n+2} = \frac{-1}{\sqrt[3]{n+1}}$$

   Montrer que $\sum u_n$ converge et que $\sum u_n^3$ diverge.

D Usage de développements asymptotiques

□ **Exercice 52** Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où $u_0 \in \mathbf{R}$, et $\forall\ n \geqslant 1$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}\cos(u_{n-1})$.

□ **Exercice 53** On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$u_n = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(n^2+n+1) - \ln(n^2+1)}$$

1) Montrer l'existence de u_n et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
2) Nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

E Sommation des relations de comparaison

□ **Exercice 54** Soit (u_n) une suite réelle à termes strictement positifs.
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, avec $\ell \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

1) Si $\ell \in [0,1[$, déterminer un équivalent de $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ en fonction de u_{n+1}.

2) Si $\ell > 1$, déterminer un équivalent de $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de u_n.

3) Déterminer des équivalents simples de : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\mathrm{ch}(k)}{k}$ et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k\ \mathrm{ch}(k)}$

□ **Exercice 55** Donner un développement asymptotique à deux termes significatifs de la suite (x_n) définie par $x_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 0, \quad x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{\sqrt{x_n}}$.

□ **Exercice 56** Soit la suite (u_n) telle que : $u_0 = 1$ et $\forall\ n \in \mathbf{N}\ ,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1) Déterminer la nature de (u_n).
2) Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.
3) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

□ **Exercice 57** On considère la suite récurrente : $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n}{1+nx_n^2} \\ x_0 = a > 0 \end{cases}$

1) Démontrer que cette suite est décroissante et converge vers 0 .
2) Démontrer que : $\quad \forall\ n \in \mathbf{N}\ ,\ \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = 2n + n^2 x_n^2$.
3) Démontrer que la suite (nx_n) est bornée .
4) Déterminer un équivalent simple de x_n .

F Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange

□ **Exercice 58** Nature de la série de terme général : $u_n = \frac{\sin(\ln n)}{n}$.
On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange sur une primitive de $f : t \longmapsto \frac{\sin(\ln t)}{t}$.

G Calculs de sommes

□ **Exercice 59** Convergence et calcul de la somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(4n^2-1)}$, $n \geqslant 1$.
On pourra utiliser que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est un réel appelé la constante d'Euler.

□ **Exercice 60** Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \mathrm{d}x$. Montrer que la série $\sum (-1)^n I_n$ est convergente et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

□ **Exercice 61** Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Calculer la somme de la série de terme général $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$.
On pourra simplifier la suite $\delta_n = \prod\limits_{k=0}^{n} \cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$ en multipliant par $\sin(\theta)$ avec θ bien choisi. On peut aussi utiliser la forme $\cos(a)\cos(b)$ pour faire apparaitre une somme de Riemann.

□ **Exercice 62** Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x) \mathrm{d}x$. Déterminer une relation de récurrence liant I_n et I_{n+2}. En déduire un équivalent de I_n.

□ **Exercice 63** Calculer la somme de la série déduite de la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ en prenant alternativement un terme positif et deux termes négatifs :

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \cdots$$

H Transformation d'Abel

Le principe de la transformation d'Abel est détaillée dans l'exercice ci-dessous; les exercices suivants en sont des applications

□ **Exercice 64** (Transformation d'Abel) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des suites réelles ou complexes. On pose pour $n \geqslant 1$: $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, et on rappelle que pour naturel $k > 0$, on a $b_k = B_k - B_{k-1}$, avec la convention (habituelle) $B_0 = 0$.
Montrer que pour tous naturels $q \geqslant p \geqslant 1$:

$$\sum_{k=p}^{q} a_k b_k = a_q B_q - a_p B_{p-1} + \sum_{k=p}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

Pour $p = 1$, on obtient donc : $\forall q > 1,\ \sum\limits_{k=1}^{q} a_k b_k = a_q B_q + \sum\limits_{k=1}^{q-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

□ **Exercice 65** On suppose que $\forall n > 0, a_n \geqslant 0$ et que $\sum a_n$ converge. On note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad ; \quad S_n = a_0 + \ldots + a_n \quad ; \quad R_n = S - S_n$$

Montrer que les séries $\sum n a_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature et qu'elles ont la même somme en cas de convergence.

□ **Exercice 66**

1) Montrer que la suite des sommes partielles de la série de terme général $\sin k$ est bornée.
2) Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{\sin n}{\ln n}$?

□ **Exercice 67** Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels tendant vers 0. On pose :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \ , \ \beta_n = n(\alpha_n - \alpha_{n+1})$$

Comparer les natures et les sommes éventuelles des séries $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$.

I Divers

□ **Exercice 68** (La Règle de Raabe-Duhamel) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \beta_n$ où la série $\sum \beta_n$ est absolument convergente et $\alpha > 0$.

1) Montrer que $\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{\alpha}{n} + w_n$ où $\sum w_n$ est absolument convergente
2) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^\alpha}$.
   On pourra utiliser que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.
3) Conclure que $\sum u_n$ converge $\iff \alpha > 1$.
4) Soit $u_n = \sqrt{n!} \prod\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $(n \geqslant 1)$. Étudier la nature de la série $\sum u_n$, puis $\sum (-1)^n u_n$.

□ **Exercice 69** Nature des séries de termes généraux $u_n = \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n}}$

J Étude de suites à l'aide de séries

□ **Exercice 70** Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0,+\infty[\\ \forall\, n \in \mathbf{N}\ ,\ u_{n+1} = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k} \end{cases}$$

1) Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$.
2) Exprimer u_k en fonction de u_{k-1}.
3) Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 71** Étudier les suites récurrentes suivantes et donner un équivalent simple du terme général de chacune d'elles :

(1) $\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall\, n \in \mathbf{N}\ ,\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall\, n \in \mathbf{N}\ ,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + u_n^2} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R} \\ \forall\, n \in \mathbf{N}\ ,\ u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3}{2} \end{cases}$ (4) $\begin{cases} u_0 \in \mathbf{R} \\ \forall\, n \in \mathbf{N}\ ,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n^2} \end{cases}$

Après avoir étudié la suite, on pourra déterminer $\beta \in \mathbf{R}^*$ tel que $\left(\frac{1}{u_k^\beta} - \frac{1}{u_{k-1}^\beta}\right)$ converge vers une limite finie non nulle.

□ **Exercice 72** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On pose pour $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$

1) Montrer que si la suite (u_n) tend vers $\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ alors la suite (a_n) aussi.
2) Réciproquement, on suppose que (a_n) converge vers $\ell \in \mathbf{R}$.
   a) Montrer que la suite (u_n) n'est pas nécessairement convergente.
   b) Montrer que (u_n) n'est pas nécessairement bornée.
   c) Montrer que si (u_n) est monotone, alors (u_n) converge vers ℓ.

□ **Exercice 73** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \ell$ avec $\ell \in \mathbf{R}$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \ell$.

□ **Exercice 74** Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. On pose pour tout $n \geqslant 0$, $y_n = \dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k$.
Montrer que si (x_n) tend vers $\ell \in \mathbf{R}$ alors la suite (y_n) converge également vers ℓ.

□ **Exercice 75**

1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que l' équation $x - e^{-x} = n$ admet une unique solution notée u_n.
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \in [n, n+1]$.
3) Déterminer un équivalent de u_n puis un équivalent de $u_n - n$.
4) Déterminer un développement asymptotique de u_n comportant trois termes significatifs.

□ **Exercice 76** Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

1) Démontrer qu'il existe un unique réel x_n tel que : $f_n(x_n) = 0$.
2) Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N}^\star\ ,\ x_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$.
3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,x_n$ et en déduire un équivalent simple de x_n.
4) a) Déterminer un équivalent simple de $x_n - \frac{1}{n}$.
   b) Déterminer un développement asymptotique de x_n sur l'échelle des puissances de $\frac{1}{n}$ à la précision $\frac{1}{n^{11}}$.

□ **Exercice 77** Soit $n \in \mathbf{N}^*$; pour x strictement positif , on note $P_n(x) = -1 + \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$.

1) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n > 0$ et que $0 < x_n \leqslant 1$.
2) Montrer , en considérant $P_{n+1}(x_n)$ que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge. Soit ℓ sa limite.
3) a) Prouver que : $\forall\, n \geqslant 2\ ,\ 0 < x_n \leqslant x_2 < 1$.
   b) Déterminer la valeur de ℓ .
4) a) En posant $x_n = \frac{1}{2} + \varepsilon_n$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\varepsilon_n = 0$.
   b) En déduire un équivalent simple de $x_n - \frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

A Séries à termes positifs, comparaisons du terme général, équivalents

□ **Exercice 78** Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^4)^n} \mathrm{d}t$.

B Comparaison à une intégrale

□ **Exercice 79** Déterminer un équivalent à l'infini de $u_n = \left(\prod\limits_{k=n}^{2n} k\right)^{\frac{1}{n}}$.

□ **Exercice 80** Montrer que la suite défine par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$ converge. En déduire la somme de la série de terme général : $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

□ **Exercice 81** On pose pour tout entiers naturels p et n non nuls : $u_{n,p} = \frac{n^{np}}{(np)!}$.

1) Etudier à p fixé la convergence de la série de terme général $(u_{n,p})_n$. On note s_p sa somme.
2) Démontrer que : $ps_{p+1} < s_p$ et étudier la convergence de la suite s_p.

C Sommation des relations de comparaison

□ **Exercice 82** Soit $g = \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+^*$ de classe $\mathscr{C}^1$, croissante, telle que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g'(x)}{g(x)} = +\infty$.

1) Donner un exemple d'une telle fonction.
2) Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$.
3) Etablir l'équivalence : $g(1) + g(2) + \ldots + g(n) \underset{n\to\infty}{\sim} g(n)$.

□ **Exercice 83** Soit (u_n) une suite réelle à termes strictement positifs, strictement croissante. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(u_n)$.

□ **Exercice 84** Soit α un réel strictement positif; on définit la suite (u_n) par $u_1 > 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}$.

1) Etudier la convergence de la suite (u_n).
2) On suppose $\alpha > 1$, et on pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Déterminer un équivalent simple de $u_n - \ell$.
3) On suppose $\alpha \in]0, 1]$. Déterminer un équivalent simple de u_n.

D Divers

□ Exercice 85

1) Calculer $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1}$.

   On pourra écrire $\frac{1}{4k+1}$ comme une intégrale.

2) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4k+1}$. Déterminer un équivalent de $S_n - S$ quand n tend vers $+\infty$.

3) Quelle est la nature de la série de terme général $S_n - S$?

□ Exercice 86 Calculer la somme de la série de terme général $u_n = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

□ Exercice 87 Soit $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ une série à termes réels convergente, on note $S_n(u)$ ses sommes partielles. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k$ et on note $S_n(v)$ les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$.

1) Exprimer $S_n(v)$ à l'aide des sommes $S_k(u)$.
2) Montrer que la série $\sum v_n$ converge et calculer sa somme.

□ Exercice 88 Soit (u_n) une suite réelle décroissante, de limite nulle. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $v_n = u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2}$, et on suppose que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n \geqslant 0$.
Etablir que $\sum n v_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} n v_n = u_1$.

□ Exercice 89 Soit $u_0 \geqslant 0$ donné ; on définit la suite u_n par : $\forall\ n \geqslant 1, u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.
Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{u_n}$.

□ Exercice 90 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n} \end{cases}$

1) Montrer que ces relations définissent bien une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et que $\forall n \geqslant 2 \quad u_n \geqslant n$
2) En déduire un équivalent de u_n et la nature de la série $\sum \frac{1}{u_n}$.

□ Exercice 91 Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $u_n = n! \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

□ Exercice 92 Soit z un complexe vérifiant $\mathrm{Re}(z) > 0$. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{z(z-1)\dots(z-n+1)}{n!}$.
Montrer que $\sum u_n$ est convergente.

□ Exercice 93 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.
On pose $S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n(u)}$.

1) Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

   On pourra étudier la suite de terme général $\ln(S_n(u))$.

2) On suppose (u_n) est bornée et que la série $\sum u_n$ diverge. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} v_k$.

□ Exercice 94 On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + \cdots + x^{n-1}}\mathrm{d}x$.

1) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

2) Déterminer un équivalent du terme général u_n.

□ **Exercice 95** Étudier la nature de la série obtenue à partir de la série $\sum \frac{1}{n}$ en supprimant les termes pour lesquels le chiffre 7 figure dans le développement décimal de n

□ **Exercice 96** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante à termes positifs. On suppose que la série $\sum u_n$ est convergente.

1) montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.
2) Montrer que le résultat est inexact si (u_n) n'est pas une suite décroissante.

□ **Exercice 97**

1) Soient $(x_1,\dots,x_n) \in]0,+\infty[^n$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in [0,+\infty[^n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

   Montrer que $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.
2) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs tel que $\sum u_n$ converge. Montrer qu'il existe une suite (a_n) de réels positifs telle que : $\prod\limits_{i=1}^{n} u_i = \dfrac{1}{(n+1)^n}\prod\limits_{i=1}^{n} u_i a_i$ On pose $v_n = \left(\prod\limits_{i=1}^{n} u_i\right)^{\frac{1}{n}}$, montrer que $\sum v_n$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

□ **Exercice 98** Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $\varphi : x \mapsto \operatorname{sh}(x) - x$ et $\alpha \in]0,+\infty[$.

1) Montrer l'existence de $\psi = \varphi^{-1}$.
2) Déterminer la nature de la série $\sum \psi\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

□ **Exercice 99** Soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k^{\alpha n}$.

Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 100** Soit $\alpha > 1$. On pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(n\alpha)^k}{k!}$ et $v_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(n\alpha)^k}{k!}$.

Déterminer des équivalents de u_n et v_n quand n tend vers $+\infty$.

CHAPITRE 2

Algèbre linéaire

1 Applications du cours

A Familles de vecteurs

□ **Exercice 1** Dans $E = \mathscr{F}(]-1,1[,\mathbf{R})$, on considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies par :

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ ;\quad f_2(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ ;\quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vérifier que f_3 appartient au plan vectoriel engendré par f_1 et f_2.

□ **Exercice 2** Déterminer les réels λ et μ pour que les vecteurs suivants de $\mathbf{R}^4$ soient linéairement dépendants et préciser alors la relation de dépendance : $a = (3,-2,-1,3)$, $b = (1,0,2,4)$ et $c = (1,-3,\lambda,\mu)$.

□ **Exercice 3** Dans $\mathbf{R}^5$, quel est le rang de la famille :

$$x_1 = (5,-3,2,1,10),\quad x_2 = (-1,8,1,-4,7),$$
$$x_3 = (2,1,9,-3,6),\quad x_4 = (1,3,-5,9,11)\ ?$$

□ **Exercice 4** Soit E le $\mathbf{R}$−espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour tout entier naturel k et tout réel $\alpha > 0$, on définit $f_k \in E$ par : $\forall\, x \in \mathbf{R}\ ,\ \ f_k(x) = |x-k|^\alpha$

1) La famille $(f_k)_{k\in[\![0\,;\,n]\!]}$ est-elle libre pour $\alpha = 2$?
2) Même question pour $\alpha = 1$.

□ **Exercice 5** Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, on pose $f_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{R}}$ est libre.

□ **Exercice 6** Pour $\alpha \in]0,1[$, on pose $f_\alpha : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f_\alpha : x \mapsto \frac{1}{1-\alpha x}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in]0,1[}$ est libre.

□ **Exercice 7** Étudier la liberté des familles suivantes :

1) $(f_{a_1}, f_{a_2}, f_{a_3})$ où a_1, a_2, a_3 sont dans $\mathbf{R}$ et $f_{a_i} : x \longmapsto \sin(x + a_i)$
2) $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $f_n : x \longmapsto \cos^n(x)$
3) $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ $f_n : x \longmapsto \cos(nx)$
4) $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{R}}$ où $f_\alpha(x)$ vaut 1 si $x = \alpha$ et 0 sinon.

□ **Exercice 8** Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$. On définit $E = \left\{ P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X \in \mathbf{R}_n[X] \ ; \ a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = 0 \right\}$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel pour les lois usuelles de $\mathbf{R}_n[X]$.
2) Déterminer une base et la dimension de E.

□ **Exercice 9** Soit $k \in \mathbf{N}$, on pose $f_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $g_k : x \mapsto \sin(kx)$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1) La famille $\mathscr{F}_n = (f_k)_{k \in [\![0\,;\,n]\!]}$ est-elle libre ?
2) La famille $\mathscr{G}_n = (g_k)_{k \in [\![1\,;\,n]\!]}$ est-elle libre ?
3) La réunion des deux familles précédentes est-elle libre ?

B Sous-espaces vectoriels, sommes

□ **Exercice 10** Dans $\mathbf{R}^4$, soient $\overrightarrow{e_1} = (1,0,2,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0,0)$, $\overrightarrow{e_3} = (0,0,0,1)$, $\overrightarrow{e_4} = (1,1,1,1)$.
Soient $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, $G = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$.
Donner des systèmes d'équations caractérisant F et G. Montrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

□ **Exercice 11** Dans $\mathbf{K}^n$ on considère la partie $H = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n \ ; \ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$ et le vecteur $\overrightarrow{e} = (1,1,\ldots,1)$.

1) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. En donner une base.
2) Montrer que H et $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{e})$ sont supplémentaires.
3) Plus généralement, montrer que si $\overrightarrow{a}$ est un vecteur de $\mathbf{K}^n$ n'appartenant pas à H, alors H et $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{a})$ sont supplémentaires.

□ **Exercice 12** Soit E l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Soit $F = \{ f \in E \ , \ f(0) = f'(0) = 0 \}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en déterminer deux supplémentaires dans E.

□ **Exercice 13** Soient E, F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, G et H deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Montrer que : $f(G+H) = f(G) + f(H)$.
2) Dans le cas où G et H sont en somme directe, $f(G)$ et $f(H)$ sont-ils en somme directe ? Examiner le cas où f est supposée injective.
3) Mêmes questions avec des sommes de p sous-espaces vectoriels de E.

□ **Exercice 14** Soient $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} E_i$. Pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ on considère $u_i \in \mathscr{L}(E_i)$.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ l'unique application linéaire associant à $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ avec $x_i \in E_i$ l'élément $u(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x_i)$.
Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(u) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(u_i) \text{ et } \mathrm{Im}(u) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(u_i)$$

□ **Exercice 15** Soit E un espace vectoriel, A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E et F un sous-espace vectoriel de E.
Les sous-espaces vectoriels $A \cap F$ et $B \cap F$ sont-ils supplémentaires dans F ?

C Applications linéaires

□ **Exercice 16** Soit ϕ l'application de $\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ dans lui même, qui à la fonction f associe la fonction

$$\phi(f) : x \mapsto \phi(f)(x) = f(x) + f(-x)$$

1) L'application ϕ est-elle linéaire ?
2) Déterminer son noyau et son image.
3) Trouver l'ensemble des fonctions g de $\mathscr{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ dont l'image par ϕ est la fonction cosinus.

□ **Exercice 17** Soit n un entier naturel non nul. On considère l'application $\varphi : \mathbf{C}[X] \to \mathbf{C}[X]$ définie par $\varphi : P \mapsto (1+X)P' - nP$.
Vérifier que φ est linéaire, et étudier l'injectivité et la surjectivité de φ.

□ **Exercice 18** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que :
    - $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$
    - $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$
    - $f \circ g = 0 \iff \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$
2) Comparer $\mathrm{rg}(g \circ f)$ avec $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{rg}(g)$.

□ **Exercice 19** Soit $E = \mathbf{R}[X]$, f, g les applications linéaires de E dans E définies par $f : P \mapsto P'$ et $g : P \mapsto XP$.

1) Montrer que f est surjective et non injective.
2) Montrer que g est injective et non surjective.

□ **Exercice 20** Soit a un réel donné. Déterminer le noyau et le rang de l'endomorphisme f_λ de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall\, P \in \mathbf{R}_n[X] \ , \ \ f_\lambda(P) = \lambda(P - P(a)) - (X-a)(P' - P'(a))$$

□ **Exercice 21** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
On note f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ défini par $f : M \mapsto AM$.

1) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
2) L'endomorphisme f est-il surjectif ?
3) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

□ **Exercice 22** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :

- $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
- $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.

□ **Exercice 23** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$\forall\, x \in E \ , \ \exists\, p \in \mathbf{N}^* \ , \ \ f^p(x) = 0$$

1) Montrer que f est nilpotent (c'est-à-dire qu'il existe $q \in \mathbf{N}$ tel que $f^q = 0_{\mathscr{L}(E)}$).
2) Trouver un contre-exemple dans le cas où E n'est plus de dimension finie.

□ **Exercice 24** Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, de base (e_1, e_2, e_3). Soit P le plan d'équation $x + y - 2z = 0$ et D la droite d'équations $x = 2y = z$.
Donner la matrice de la projection sur P parallèlement à D.

□ **Exercice 25** Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, de base (e_1, e_2, e_3). Soit P le plan d'équation $x + 3y - z = 0$ et D la droite engendrée par le vecteur $e_1 + 2e_2 - e_3$. Donner la matrice de la symétrie par rapport à D et parallèlement à P.

□ **Exercice 26** Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, de base (e_1, e_2, e_3) ; soient trois réels α, β, γ tels que : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Soit P le plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ et D la droite dirigée par $u = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.
Donner la matrice (dans la base (e_1, e_2, e_3)) de la projection sur P parallèlement à D. et la matrice de la symétrie sur d'axe D parallèlement à P.

□ **Exercice 27** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, p un projecteur de E et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que :
$$p \circ f = f \circ p \iff \mathrm{Ker}(p) \text{ et } \mathrm{Im}(p) \text{ sont stables par } f$$

□ **Exercice 28** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

1) Soient p, q deux projecteurs de E tels que $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q)$
   Montre que : $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
2) Soient p et q deux endomorphismes de E tels que : $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.
   Montrer que p et q sont des projecteurs et que : $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(q)$.
3) Soient p, q deux projecteurs de E. Montrer que :
$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q) \iff \begin{cases} q \circ p = p \\ p \circ q = q \end{cases}$$

□ **Exercice 29** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et p un projecteur. Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

□ **Exercice 30** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient p et q deux projecteurs de E. On note A et B leurs matrices respectives dans une base quelconque. Montrer que A est semblable à B si et seulement si $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{rg}(q)$.

□ **Exercice 31** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $f^2 - 4f + \mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Démontrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}.

□ **Exercice 32** Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$ et $M = AA^\top$. Déterminer $\mathrm{Ker}(M)$, $\mathrm{Im}(M)$.

□ **Exercice 33** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. On note a est l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Déterminer $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de a est :
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 34**

1) Soient E un K-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme non nul de E tel que $u \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2) Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = 0$. Trouver la dimension de $F = \{X \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \ , \ AX + XA = 0\}$.

□ **Exercice 35** Le but de cet exercice est de démontrer qu'il n'existe pas de matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = -I_3$.

1) Soit M une telle matrice. On considère l'endomorphisme u de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à M, c'est-à-dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est M.
   Quelle relation vérifie u ?
   Démontrer que, pour tout vecteur x non nul de $\mathbf{R}^3$, la famille $(x, u(x))$ est libre.
2) Donner la matrice de u dans une base adaptée de $\mathbf{R}^3$.
3) Conclure.

□ **Exercice 36** Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbf{R}^3$ tel que $u^3 = -u$.

1) Démontrer que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
2) Démontrer que 0 est l'unique valeur propre réelle de u.
3) Démontrer que le rang de u est égal à 2.
   (On pourra démontrer par l'absurde que u n'est pas de rang 1)
4) En déduire qu'il existe une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 37** Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$

1) Déterminer le rang de M et la dimension de $\mathrm{Ker}(M)$.
2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(M)$ et une base de $\mathrm{Ker}(M)$.

□ **Exercice 38** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que si p est un projecteur de E, alors $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.
2) Si $\mathrm{rg}(f) = 1$, peut-on affirmer que f soit un projecteur ?
3) Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $\mathrm{tr}(f) = 1$, alors f est un projecteur.

□ **Exercice 39** On considère $f : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$ définie par $f : P \mapsto P - P'$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. Exprimer f^{-1}, puis exprimer les matrices de f et f^{-1} dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

□ **Exercice 40** (Matrices de permutations)
Soit n un entier strictement positif et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$.
On note $P_\sigma \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (P_\sigma)[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère $f_\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'endomorphisme canoniquement associé à P_σ. On notera $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

1) Soit $j \in [\![1,n]\!]$, déterminer $f_\sigma(e_j)$.
2) En déduire que $\pi : \sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupe $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.
3) Déterminer $\gamma \in S_n$ telle $P_\sigma^\top = P_\gamma$. Que dire de P_σ?

D Changement de bases

□ **Exercice 41** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.
Les matrices A et B sont-elles semblables ?

□ **Exercice 42** Soit u un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ tel que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$. Montrer que n est pair et qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{\frac{n}{2}} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

E Formes linéaires et hyperplans

□ **Exercice 43** Dans $\mathbf{R}^3$, de base canonique (e_1, e_2, e_3), on considère

$$\begin{cases} y_1 = 2e_1 + e_2 + e_3 \\ y_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ y_3 = e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

Montrer que (y_1, y_2, y_3) est une base de $\mathbf{R}^3$ et déterminer sa base duale.

□ **Exercice 44** Déterminer le rang de chacune des familles de formes linéaires suivantes :

1) Sur $\mathbf{R}^4$

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ f_2(x) = x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 \\ f_3(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 + 7x_4 \end{cases}$$

2) Sur $\mathbf{R}^3$

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1 + x_2 - x_3 \\ f_2(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ f_3(x) = 5x_1 - 2x_2 + x_3 \\ f_4(x) = 11x_1 - 14x_3 \end{cases}$$

□ **Exercice 45** On se donne sur $\mathbf{C}^3$ les formes linéaires φ_1, φ_2 et φ_3 définies par :

$$\varphi_1 : (x, y, z) \mapsto x + 2y - 3z \text{ , } \varphi_2 : (x, y, z) \mapsto 5x - 3y \text{ et } \varphi_3 : (x, y, z) \mapsto 2x - y - z$$

Vérifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbf{C}^3)^*$ et déterminer la base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{C}^3$ dont elle est la base duale.

□ **Exercice 46** Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ et φ_1, φ_2 et φ_3 les formes linéaires définies sur E par :

$$\forall\, P \in E \;,\; \varphi_1(P) = P(0) \;,\; \varphi_2(P) = P'(1) \;,\; \varphi_3(P) = P''(-1)$$

Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* et déterminer la base $\mathscr{B}$ de E dont elle est la base duale.

□ **Exercice 47** Soit $E = \mathbf{K}_{n-1}[X]$, soient $a_1, \ldots, a_n$ n éléments distincts de $\mathbf{K}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).
Soient φ_i les formes linéaires définies sur E par : $\varphi_i \;:\; P \longmapsto P(a_i)$.

1) Montrer que $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de E^*.
2) Montrer qu'il existe $(\lambda_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbf{R}^n$ unique tel que :

$$\forall P \in E, \qquad \int_0^1 P(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(a_i)$$

□ **Exercice 48** Soient E un $\mathbf{K}$ e.v. de dimension finie et $n = \dim(E)$.
Démontrer que pour toute famille $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ de n éléments de $E^\star$,

$$(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \text{ est liée} \quad \Longleftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \varphi_i(x) = 0$$

F Éléments propres

□ **Exercice 49** Rechercher les valeurs propres (réelles, puis complexes) et les sous-espaces propres associés des matrices suivantes ; sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$? dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 8 & -1 & 12 \\ 4 & -2 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 6 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 5 \\ -5 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 50** Soit E l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ définies sur $]0,+\infty[$ à valeurs réelles. Soit $\varphi : E \to E$ qui associe à une fonction f la fonction g définie par $g : x \mapsto xf'(x)$.

1) Déterminer les éléments propres de φ.
2) Reprendre l'exercice en remplaçant $]0,+\infty[$ par $[0,+\infty[$.

□ **Exercice 51** On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,+\infty[$. Soit u l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $u(f)$ définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$u(f) : x \longmapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

1) Démontrer que pour tout f de E, $u(f)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
2) Montrer que pour toute fonction f de E, $u(f)$ est prolongeable par continuité en 0 (on notera encore $u(f)$ le prolongement) ; en déduire que u est un endomorphisme de E.
3) On cherche ici les valeurs propres et les vecteurs propres de u.
   a) Démontrer que 0 n'est pas valeur propre de de u.
   b) Soit α un réel différent de 0 et f un élément de E non nul, tels que $u(f) = \alpha f$. Montrer que f est nécessairement dérivable sur $]0,+\infty[$, et trouver une équation différentielle vérifiée par h, restriction de f à $]0,+\infty[$.
   Résoudre cette équation différentielle, et déterminer une condition nécessaire sur α pour que les fonctions h trouvées soient effectivement la restriction d'une fonction f continue sur $[0,+\infty[$.
   c) Conclure en donnant les valeurs propres de u et les vecteurs propres associés.

G Calcul matriciel

□ **Exercice 52** Calculer M^k ($k \in \mathbf{N}$), avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 53** Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Prouver que :

$$(TT^\top = T^\top T) \iff T \text{ est diagonale}$$

□ **Exercice 54** (Matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note $I = [\![1\,;\, n]\!]$.
Pour tout couple $(i,j) \in I^2$, on considère la matrice élémentaire $E_{ij} = (e_{kl})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ définie par :

$$\forall (k,l) \in I^2,\ e_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$$

1) Soit $(i,j) \in I^2$ et $(k,l) \in I^2$. Déterminer le produit matriciel $E_{ij}E_{kl}$.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Préciser la matrice AE_{ij}.
3) Préciser la matrice $E_{ij}A$.
4) En utilisant un produit matriciel, échanger deux colonnes, puis deux lignes de la matrice A.
5) En utilisant un produit matriciel, ajouter à la $j^{\text{ième}}$ colonne λ fois la $i^{\text{ième}}$ colonne ; idem pour les lignes.
6) Déterminer le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, c'est à dire :

$$\left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})\ ;\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}),\, AM = MA\right\}$$

□ **Exercice 55** (Matrices circulantes - I) Soit $E = \{C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\,;\, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{C}^n\}$ où

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

On note $J = C(0, 1, 0, \dots, 0)$. Calculer J^k pour $k \in \mathbf{N}$. En déduire que E est une algèbre dont on donnera la dimension.

□ **Exercice 56** Déterminer le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -7 & 9 & 15 \\ -5 & 11 & 14 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 57** (Matrices de rang 1)

1) Soit $M = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Démontrer que la matrice M est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes non nulles $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ telles que : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ a_{ij} = b_i c_j$. Vérifier alors que $M = BC^\top$.
2) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de rang 1.
Démontrer qu'il existe $k \in K$ tel que $M^2 = kM$. Étudier la réciproque.
3) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On considère le vecteur v de coordonnées $(b_1, \dots, b_n)$ et l'hyperplan H d'équation $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j = 0$ dans la base $\mathscr{B}$.
On suppose que $v \notin H$. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la projection sur la droite vectorielle de base (v), parallèlement à H.
On pourra déterminer analytiquement cette projection ou utiliser une écriture matricielle
4) Soit M une matrice non nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbf{K})$.
Démontrer que : $M^2 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 1$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

□ **Exercice 58** Soient $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$, $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Pour $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$, on note $A_{ij} = X_i X_j^\top$. Etablir que $(A_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,p\}^2}$ est libre.

□ **Exercice 59**

1) Peut-on avoir $I_n = AB - BA$, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$?
2) Montrer que :$(\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})\,,\ \mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)) \Rightarrow\ A = B$.

□ **Exercice 60** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

□ **Exercice 61** (Matrice de diagonale strictement dominante) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $n \geqslant 2$, telle que $\forall\, i \in [\![1 ; n]\!], |a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} | a_{ij} |$.
Montrer que A est inversible.

□ **Exercice 62** Soient $n, p \in \mathbf{N}^\star$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $C \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
Démontrer que $M \in \mathrm{GL}_{n+p}(\mathbf{K})$ et calculer M^{-1} sous forme de matrice par blocs.

□ **Exercice 63** Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

1) Soit $E = \left\{ aI + bJ \ , \ (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$. Démontrer que E est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, de base (I, J).
2) Déterminer les éléments de E admettant un inverse dans E, dont on précisera les coordonnées dans la base (I, J).
3) Résoudre dans E les équations d'inconnue X : $X^2 = I$ puis $X^2 = X$.
4) Soit p l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice J dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
   Vérifier que p est un projecteur et déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est $J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 64** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n

□ **Exercice 65** Calculer J^n pour $J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & . & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbf{R})$,

puis pour $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

□ **Exercice 66** Soit E le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ $(n \geqslant 2)$ constitué des matrices $A(\alpha, \beta)$ telles que :

$$\exists\, \alpha, \beta \in \mathbf{R} \begin{cases} \forall\, i \in [\![1 ; n]\!] & a_{ii} = \alpha + \beta \\ \forall\, i \neq j & a_{ij} = \beta \end{cases}$$

On pose J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, dont (I_n, J) est une base.
2) Quelles sont les matrices A inversibles dans E ?
3) Justfier que : $\forall A \in E$, $\forall\, p \in N$, $\exists\, (a_p, b_p) \in \mathbf{R}^2$ tel que $A^p = a_p I_n + b_p A$.
4) On propose deux méthodes pour déterminer les coefficients a_p et b_p :
   a) Déterminer un polynôme P de degré 2 annulant A, calculer le reste $b_p X + a_p$ de la division euclidienne de X^p par P, et en déduire le résultat.
   b) Procéder par récurrence sur p et calculer a_p et b_p.

H Déterminant

□ **Exercice 67** Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

□ **Exercice 68** On considère dans $\mathbf{R}^3$ les trois vecteurs $\varepsilon_1 = (2, -1, 3)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 2)$ et $\varepsilon_3 = (4, -1, 5)$. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est-elle une base de $\mathbf{R}^3$?

□ **Exercice 69** Soit $(a, b, c) \in \mathbf{K}^3$.

1) Démontrer que : $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc$.

2) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$.

3) Démontrer que : $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$.

□ **Exercice 70** Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$, on pose $a + b + c = 2p$.
Démontrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix} = 4 \sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)$$

□ **Exercice 71** Dans le développement du déterminant d'une matrice $M = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_6(\mathbf{K})$, quel est le signe de chacun des produits suivants : $a_{61}a_{23}a_{45}a_{32}a_{56}a_{14}$, $a_{21}a_{62}a_{34}a_{56}a_{15}a_{43}$ et $a_{23}a_{41}a_{65}a_{12}a_{56}a_{34}$?

□ **Exercice 72** Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & \dots & \alpha_n \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ \alpha_1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

□ **Exercice 73** Soit n un entier naturel non nul. On considère le déterminant d'ordre n

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 5 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 6 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

1) Exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1} et Δ_{n-2} ($n \geqslant 3$).

2) En déduire Δ_n ($n \in \mathbf{N}^*$).

□ **Exercice 74** Calculer le déterminant de la matrice $A = (|i - j|) \in \mathscr{M}_n(K)$.

□ **Exercice 75** (Déterminant de Vandermonde)
Soit $a_1,\dots,a_n$ des complexes, on pose

$$V(a_1,\dots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Calculer $V(a_1,\dots,a_n)$.

On pourra remplacer la dernière colonne par $\begin{pmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix}$ *où* $P=\prod_{i=1}^{n-1}(X-a_i)$ *et montrer que cela ne change pas la valeur du déterminant.*

□ **Exercice 76** (Déterminant de Cauchy)
Calculer le déterminant de la matrice $A=\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)\in\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ où $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ sont des complexes tels que $a_i+b_j\neq 0$ pour tout (i,j).

On pourra remplacer la dernière colonne par $\begin{pmatrix} R(a_1) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}$ *où* $R=\dfrac{\prod_{i=1}^{n-1}(X-a_i)}{\prod_{i=1}^{n}(X+b_i)}$.

□ **Exercice 77** (Matrices circulantes)
Soit E l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ de la forme

$$\Gamma(a_0,a_1,a_2)=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que E est une sous-algèbre de dimension 3 de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$; on en donnera une base.
2) Soit la matrice de Vandermonde : $\mathscr{V}(1,j,j^2)=\left(j^{(i-1)(k-1)}\right)_{(i,k)\in[\![1\,;3]\!]^2}$. Calculer $\Gamma(a_0,a_1,a_2)\mathscr{V}(1,j,j^2)$, et en déduire le déterminant de $\Gamma(a_0,a_1,a_2)$.
3) En utilisant la méthode décrite ci-dessus, calculer le déterminant

$$\Gamma(a_0,\dots,a_{n-1})=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ddots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \ddots & a_{n-3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 78** Soit $A,M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ où $\mathrm{rg}(M)=1$. Montrer que $\det((A+M)(A-M))\leqslant\det(A^2)$.

□ **Exercice 79** Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Soit $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que : $\forall X\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\ ,\ \det(A+X)=\det(B+X)$. Montrer que $A=B$.

□ **Exercice 80** Soient $n\in\mathbf{N}^*$, $P\in\mathbf{C}_n[X]$, $\deg(P)=n$.

1) Soit $a_0,a\dots,a_n\in\mathbf{C}$ deux à deux distincts. Montrer que $\big(P(X+a_i)\big)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.
2) En déduire la valeur, pour $x\in\mathbf{C}$, de $\det\left(\big(P(x+i+j)\big)_{(i,j)\in[\![1\,;n+1]\!]^2}\right)$.

□ **Exercice 81** Soient $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(C)$ où $C\in\mathscr{M}_{2n}(\mathbf{K})$ est définie par blocs par $C=\left(\begin{array}{c|c} aA & bA \\ \hline cA & dA \end{array}\right)$.

□ **Exercice 82** Soient $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $CD^\top + DC^\top = 0$.
Montrer que : $\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right|^2 = (\det(AD^\top + BC^\top))^2$.

□ **Exercice 83** Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Montrer que : $\det\left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array}\right) \geqslant 0$.
On pourra utiliser des nombres complexes.

□ **Exercice 84** Soient $p, q \in \mathbf{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbf{K})$, $C \in \mathscr{M}_{qp}(\mathbf{K})$, $D \in \mathscr{M}_q(\mathbf{K})$.
Montrer que : $\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$.

□ **Exercice 85** Soit $n \geqslant 2$. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ on définit $L_A : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ par $L_A : M \longmapsto AM$.
Calculer $\det(L_A)$.

□ **Exercice 86** Soit $D_n(\alpha) = \begin{vmatrix} 1^\alpha & 2^\alpha & \cdots & n^\alpha \\ 2^\alpha & 3^\alpha & & (n+1)^\alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^\alpha & (n+1)^\alpha & \cdots & (2n-1)^\alpha \end{vmatrix}$.

1) Calculer $D_n(1)$.
2) Calculer $D_n(2)$.
3) Calculer $D_n(3)$.
4) Expliquer pourquoi $D_n(\alpha)$ est nul pour n suffisamment grand (et α entier naturel).

□ **Exercice 87** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall\ (i,j) \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]\ ,\ a_{ij} \in \{-1, 1\}$. Montrer que son déterminant est un multiple de 2^{n-1}.

□ **Exercice 88** Calculer le déterminant suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$

□ **Exercice 89**

1) Soit $n \geqslant 2$; soit , $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $A = (a_{lj})$ avec $a_{lj} = e^{\frac{2i\pi}{n}(l-1)(j-1)}$. Calculer A^2.
2) Soit $D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & . & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$. Calculer D_n.
3) Calculer $\det(A^2)$; que peut on dire de $\det(A)$?

I Espaces de matrices et d'endomorphismes

□ **Exercice 90** Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et $E = \{aI_2 + bS\,;\, (a,b) \in \mathbf{R}^2\}$

1) Montrer que E est une sous-algèbre unitaire de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
2) Déterminer les éléments inversibles de E.

□ **Exercice 91** Déterminer la dimension du commutant d'un projecteur de rang r d'un espace de dimension n.

□ **Exercice 92** Soit E l'espace des matrices symétriques d'ordre n à coefficients complexes et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice fixée. On pose $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi : M \longmapsto A^\top M + MA$. Vérifier que φ est un endomorphisme de E et calculer $\operatorname{tr}(\varphi)$.

□ **Exercice 93** Soit D une matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ à éléments diagonaux deux à deux distincts.

1) Quelle est la dimension de l'image de l'application $M \mapsto DM - MD$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dans lui-même ?
2) Montrer que cette image est contenue dans l'ensemble des matrices à diagonale nulle.
3) En déduire qu'elle est égale à cet ensemble.

□ **Exercice 94** Soit $n \geqslant 2$. On considère $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $\varphi : M \longmapsto M + \operatorname{tr}(M) I_n$.

1) Vérifier que φ est linéaire et déterminer $\operatorname{tr}(\varphi)$.
2) Déterminer $\operatorname{rg}(\varphi)$.

□ **Exercice 95** Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ ($n \geqslant 2$). On considère $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $\varphi : M \longmapsto AMB$.

1) Vérifier que φ est linéaire et déterminer $\operatorname{tr}(\varphi)$.
2) Déterminer $\operatorname{rg}(\varphi)$.

2 Exercices plus élaborés

A Familles de vecteurs

□ **Exercice 96** Pour $n \in \mathbf{N}$ et $r \in [\![0, n]\!]$, on note $P_r(X) = (X-1)^r (X+1)^{n-r}$. Démontrer que $P_0, P_1, \dots, P_n$ sont linéairement indépendants.

□ **Exercice 97** Pour $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ on pose $f_{\alpha,\beta} :]1, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $f_{\alpha,\beta} : x \mapsto x^\alpha (\ln x)^\beta$.
Étudier la liberté de $\left(f_{(\alpha,\beta)}\right)_{(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2}$.

B Sous-espaces vectoriels, sommes

□ **Exercice 98** Soit E un espace vectoriel, $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$$

1) Pour tout $i \in [\![\, 1\,;\, p \,]\!]$, soit F_i un sous-espace vectoriel de E_i. Montrer que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe.
2) Dans cette question $p = 2$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Donner un exemple où $F = (F \cap E_1) \oplus (F \cap E_2)$ puis un exemple où $F \neq (F \cap E_1) \oplus (F \cap E_2)$. On pourra faire des dessin en dimension 2.
3) Montrer $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$ si et seulement s'il existe $F_1, \dots F_p$ des sous-espaces vectoriels de $E_1, \dots, E_p$ respectivement tels que $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$.

□ **Exercice 99** Soit E un K espace vectoriel de dimension finie n, H_1 et H_2 deux hyperplans de E distincts. Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

C Applications linéaires

□ **Exercice 100** Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et 2π-périodiques : Soit l'application $T : E \to E$ définie par $T : f \mapsto f'$.

1) Montrer que T est linéaire et déterminer $\mathrm{Ker}(T)$ et $\mathrm{Im}(T)$.
2) À-t-on $\mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T) = E$?

□ **Exercice 101** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel quelconque, u, v deux endomorphismes de E ; montrer l'équivalence :

$$u \circ v \in \mathrm{GL}(E) \iff \begin{cases} u \text{ surjectif, } v \text{ injectif,} \\ \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(v) = E \end{cases}$$

□ **Exercice 102** Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbf{R}^3$ tel que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ et $\varphi \in \mathscr{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^3 \ , \ f(x) = \varphi(x)\, a$$

□ **Exercice 103** Soient E, F des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) Montrer que : $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
2) On suppose que $E = F$, que $u + v$ est un automorphisme de E et que $u \circ v = 0$. Montrer que : $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = n$ où $\dim(E) = n$.

□ **Exercice 104** Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, E)$, vérifiant : $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$. Montrer que : $E = \mathrm{Im}(v) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

□ **Exercice 105** Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $E_n = \mathbf{C}_n[X]$, soit f l'application linéaire définie sur $\mathbf{C}[X]$ par :

$$f \ : P \longmapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

Montrer que f induit un isomorphisme de E'_n sur E_{n-2} où $E'_n = \{P \in E_n / P(0) = P'(0) = 0\}$.

□ **Exercice 106** (Lemme de factorisation)

1) Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
   Montrer que : f est injective (resp. surjective) si et seulement si il existe $g \in \mathscr{L}(F, E)$ tel que $g \circ f = id_E$ (resp. $f \circ g = id_F$).
2) Soient E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(E, G)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathscr{L}(F, G)$ vérifiant $g = h \circ f$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

□ **Exercice 107** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n supérieure ou égale à 2. Montrer que tout endomorphisme de E est somme de deux automorphismes de E.
On cherchera à construire deux bases de E adaptées à l'endomorphisme.

□ **Exercice 108** Soit f un endomorphisme de E, $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, tel que f^2 soit non nul et $f^3 = 0$.

1) Montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $(e, f(e), f^2(e))$ soit une base de E.
2) Trouver les endomorphismes de E commutant avec f.

□ **Exercice 109** Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$, $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^3)$, $M = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$. On suppose que $M^3 = -M$ et $M \neq 0$.

1) Soit g l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ induit par f ; calculer g^2. Que vaut $\mathrm{rg}(f)$?
2) Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 110** Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ f = -\mathrm{id}$; soit e_1 un vecteur non nul.

1) Montrer que $(e_1, f(e_1))$ est libre.
2) Montrer que n est pair.
3) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que
$$\mathscr{M}(f,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
4) Montrer que l'application
$$\begin{cases} \mathbf{C} \times E & \to \quad E \\ (\lambda, x) & \mapsto \quad a\,x + b\,f(x) \quad \text{où } a = Re(\lambda),\ b = Im(\lambda) \end{cases}$$
confère à E une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel. Retrouver les résultats précédents à l'aide de cette constatation.
5) Réciproquement, montrer que si n est pair, il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -id$.

□ **Exercice 111** Soit E un espace vectoriel de dimension $3n$, u un endomorphisme de E tel que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 2n$.

1) Montrer que $\mathrm{rg}(u^2) = n$.
2) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : matrice définie par blocs :
$$\mathscr{M}(u,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 112**

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que :
$$\forall\, x \in E\ ,\ \exists\, \lambda_x \in \mathbf{K}\ ,\ f(x) = \lambda_x\, x$$
Montrer que f est une homothétie.

□ **Exercice 113** Soit E un espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel qu'il existe un unique $v \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u \circ v = \mathrm{id}$. Montrer que u est inversible.

□ **Exercice 114** Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E et $T : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ défini par $T : g \longmapsto f \circ g - g \circ f$.
Montrer que si f est nilpotent, alors T l'est aussi.

□ **Exercice 115**

1) Montrer que la trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
2) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^*$, l'équation $A + \alpha I_n = B^{-1}AB$ n'admet pas de solutions $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ $(n \neq 0)$.
3) Soient u et v deux endomorphismes de E, $\mathbf{R}-$espace vectoriel de dimension finie, tels que $u = u \circ v - v \circ u$.
Montrer que u n'est pas bijectif.
4) Soit $E = \mathbf{R}^2$ et u un endomorphisme non nul de E tel que $u^2 = 0$.
Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$ et $\mathrm{tr}(u) = 0$.

□ **Exercice 116** Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, commutant entre elles.
Montrer que : $A_1.A_2.\ldots.A_n = 0$
On pourra commencer par montrer que si $u \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ est nilpotente, et si F est un sous-espace vectoriel non nul stable par u, alors $\dim u(F) < \dim(F)$.

D Changement de bases

□ **Exercice 117** Soient E et F deux K espaces vectoriels de dimensions respectives p et n non nulles et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application de rang r. Démontrer que

$$G = \{g \in \mathscr{L}(F,E)\,;\, f \circ g = 0_{\mathscr{L}(F)} \text{ et } g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$$

est un espace vectoriel de dimension $(p-r)(n-r)$.

□ **Exercice 118** Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de E. On pose $A = \{f \in \mathscr{L}(E); f(F) \subset F\}$. Vérifier que A est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$. En donner sa dimension.

E Formes linéaires et hyperplans

□ **Exercice 119** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1 et $u \in E\backslash\{0\}$ tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathbf{K}u$.

1) Montrer qu'il existe $\varphi \in E^\star$ unique tel que : $\forall x \in E, \qquad f(x) = \varphi(x)u$.
2) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{K}$ unique tel que $f^2 = \alpha f$ et que, si $\alpha \neq 1$, $f - \mathrm{id}$ est inversible.

□ **Exercice 120** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

1) Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \to & \mathbf{K} \\ X & \to & \mathrm{tr}(AX) \end{array}$$

est un élément de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}))^\star$, puis que l'application $\theta : \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \to (\mathscr{M}_n(\mathbf{K}))^\star$ définie par :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \quad (\theta(A))(X) = \mathrm{tr}(AX)$$

est un isomorphisme de $\mathbf{K}$ espace vectoriel.

2) Montrer qu'une forme linéaire φ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qui vérifie :

$$\forall\, M,N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \ \ , \ \ \varphi(MN) = \varphi(NM)$$

est proportionnelle à la trace.
En déduire que le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(MN - NM / M,N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

□ **Exercice 121** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\ell, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p$ sont des formes linéaires sur E. Démontrer :

$$\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}(\ell_i) \subset \mathrm{Ker}(\ell) \Longleftrightarrow \ell \in \mathrm{Vect}(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$$

□ **Exercice 122** Soient $E = \mathbf{R}_3[X]$ et a et b deux réels donnés vérifiant $a < b$.

1) Soit $P_0 = (X-a)(X-b)(X - \frac{a+b}{2})$. Montrer que

$$\int_a^b P_0(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

2) Démontrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que :

$$\forall P \in \mathbf{R}_3[X] \qquad \int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

On pourra utiliser l'exercice précédent.

3) Calculer α, β, γ.

□ **Exercice 123** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E, $P = (p_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Soient $\mathscr{B}^*(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ et $\mathscr{B}'^* = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ les bases duales de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, et Q la matrice de passage de $\mathscr{B}^*$ à $\mathscr{B}'^*$.
Montrer que $Q = (P^\top)^{-1} = (P^{-1})^\top$.

Application : On pose $E = \mathbf{K}_{n-1}[X]$, $\mathscr{B} = (X^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$, $\mathscr{B}' = ((X-a)^k)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$, $\varphi_k \ : \ P \longmapsto \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ et $\psi_k \ : \ P \longmapsto \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$. Déterminer les matrices P et Q

□ **Exercice 124** Soient $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $n \geq 2$ et a et b deux réels distincts. Montrer qu'il existe une forme linéaire et une seule φ sur $\mathbf{R}_n[X]$ telle que :

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(X) = 0, \quad \forall P \in \mathbf{R}_n[X], \qquad (P(a) = P(b) = 0 \Longrightarrow \varphi(P) = 0)$$

F Éléments propres

□ **Exercice 125** Soit S l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles définies à partir du rang 1. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S \\ U & \longmapsto & V \end{array}$, avec, si $U = (u_n)$, $V = (v_n)$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

1) Montrer que φ est un automorphisme de E.
2) Déterminer les éléments propres de φ.

□ **Exercice 126** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbf{R})$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices $\left(\begin{array}{c|c|c} A & A & A \\ \hline A & A & A \\ \hline A & A & A \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c|c} A & A & A \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline A & A & A \end{array}\right)$

□ **Exercice 127** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ deux matrices diagonalisables. Montrer que la matrice C définie par blocs par $C = \left(\begin{array}{c|c} b_1A & b_2A \\ \hline b_3A & b_4A \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{R})$ est diagonalisable.

G Calcul matriciel

□ **Exercice 128** Soit $n \geqslant 2$; on pose $a = e^{\frac{i2\pi}{n}}$, $X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $X = (x_{pq})$ avec $x_{pq} = a^{(p-1)(q-1)}$ et $Y = (y_{pq})$ avec $y_{pq} = a^{-(p-1)(q-1)}$.
Calculer X^2 , Y^2 , XY , YX. X admet-elle un inverse ?

□ **Exercice 129** Soit u un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ tel que :

$$u(I_n) = I_n \qquad \text{et} \qquad \forall\, A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \ , \ u(AB) = u(BA)$$

Montrer que u conserve la trace.

□ **Exercice 130** Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$, soit $C = AB^\top$ et $D = C - I_n$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que D soit inversible et calculer, dans ce cas, D^{-1}.

□ **Exercice 131** Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{rg}(B) = 1$.
Montrer que : $A + B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{tr}(BA^{-1}) \neq -1$.

□ **Exercice 132** Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et M la matrice définie par blocs :
$M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)$,

1) Calculer le rang de M en fonction de A et B.
2) Calculer M^{-1} quand elle existe.

□ **Exercice 133** Soient $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.
Montrer que si $M \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{K})$ est la matrice définie par blocs : $M = \left(\begin{array}{c|c} P & I_n \\ \hline O_{n,n} & Q \end{array}\right)$, alors M est inversible et déterminer son inverse.

H Espaces de matrices et d'endomorphismes

□ **Exercice 134** Soit E un espace vectoriel. On appelle le centre de $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble :
$C(\mathscr{L}(E)) = \{f \in \mathscr{L}(E) / \forall g \in \mathscr{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$.

1) Déterminer $C(\mathscr{L}(E))$ si E est de dimension finie.
2) Même question si E n'est pas de dimension finie.

□ **Exercice 135** Soit f une application non constante de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$, telle que :

$$\forall\,(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})^2 \quad , \quad f(AB) = f(A)f(B)$$

Montrer que $f(A) \neq 0 \iff A$ est inversible.

□ **Exercice 136** Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de rang r fixé. On considère

$$F = \{B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})\ ,\ ABA = 0\}.$$

1) Montrer que F est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2) Déterminer F si $A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$.

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ **Exercice 137** Soit E un $\mathbf{K}-$ espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.
Soit u un endomorphisme u de E. pour tout entier naturel k, on pose $d_k = \dim(\mathrm{Ker}(u^k))$, et $\delta_k = d_{k+1} - d_k$.

1) Montrer que la suite (d_k) est croissante.
2) Montrer que la suite (d_k) est strictement croissante jusqu'à un certain rang, puis qu'elle est stationnaire.
3) Montrer que la suite (δ_k) est décroissante.
4) Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que : $E = \mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$.

□ **Exercice 138** A et B étant données dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, résoudre dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$:
a) $X = \mathrm{tr}(X)A + B$ b) $X + X^\top = \mathrm{tr}(X)A$.

□ **Exercice 139** Soient n et p deux entiers naturels non nuls ; soit $(A_k)_{k \in \{1,\dots p\}}$ une famille d'éléments deux à deux distincts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, telle que $\{A_1, \dots, A_p\}$ soit stable pour la multiplication.
Montrer que $\mathrm{tr}\left(\sum\limits_{k=1}^{p} A_k\right)$ est un entier naturel multiple de p.

□ **Exercice 140** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$; déterminer les matrices $X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que
$\mathrm{Com}(X) = A$ où $\mathrm{Com}(X)$ désigne la comatrice de X.

CHAPITRE 3

Intégrales sur un intervalle quelconque

A Intégrabilité

□ **Exercice 1** Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$a)\ \int_0^{+\infty}(x+2-\sqrt{x^2+4x+1})\mathrm{d}x \qquad b)\ \int_0^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$c)\ \int_1^{+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^3+x+1}}\mathrm{d}x \qquad d)\ \int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$e)\ \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(1+e^x)}}\mathrm{d}x \qquad f)\ \int_0^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$g)\ \int_0^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x \qquad h)\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{\left(\operatorname{sh}(\sqrt{\ln x})\right)^2}\mathrm{d}x$$

□ **Exercice 2** Discuter l'existence selon $\alpha \in \mathbf{R}$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty}(1-\operatorname{th}^{\alpha}(x))\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 3** Soit α un réel. Étudier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\operatorname{th}(x)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 4** Déterminer tous les couples $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ tels que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^a)}{x^b}\,\mathrm{d}x$ existe.

□ **Exercice 5** Étudier l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ de $f\ :x\longmapsto(x+1)^{\frac{1}{x+1}}-\frac{x+\ln(x)}{x}$.

□ **Exercice 6** Soit $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que f^2 et f'^2 sont intégrables sur $\mathbf{R}_+$.
Montrer que $(f')^2$ est intégrable sur : R_+ et en déduire que $\lim\limits_{+\infty} f=0$.

□ **Exercice 7** Soit $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbf{R}_+$.

1) À l'aide d'un exemple, montrer que f ne tend pas nécessairement vers 0 en $+\infty$.
2) Montrer que si on suppose que f est uniformément continue alors $\lim\limits_{+\infty} f=0$

B Calculs

□ **Exercice 8** Calculer les intégrales suivantes après avoir montré leur existence. On pourra réaliser le changement de variables précisé entre parenthèses.

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} \mathrm{d}x \qquad b) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}} \mathrm{d}x \quad \left(u = \sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}\right)$$
$$c) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} \mathrm{d}x \qquad d) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x+1}} \mathrm{d}x \quad (u = \sqrt{e^x+1})$$

□ **Exercice 9** Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ est intégrable sur $]0,1[$, puis calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} \mathrm{d}x$

□ **Exercice 10**

1) Étudier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2+a^2} \mathrm{d}x$, pour $a \in \mathbf{R}_+$.
2) La calculer pour $a = 1$.
3) La calculer pour $a > 0$.

□ **Exercice 11** Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{(1+x)^2} \mathrm{d}x$

On pourra utiliser l'exercice précédent.

□ **Exercice 12** Soit $n \in \mathbf{N}$. Existence et valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x$.

□ **Exercice 13** Soit $n \in \mathbf{N}$. Existence et calcul de $I_n = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} e^{-x} x^n \sin(x) \mathrm{d}x$.

□ **Exercice 14** Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\sin t+\cos t} \mathrm{d}t$.

On pourra poser $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

□ **Exercice 15** Soit $n \in \mathbf{N}$, on pose $f_n : t \longmapsto \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}$.

1) Montrer que f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2) Soit $I_n = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} f_n(t) \mathrm{d}t$. Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} puis calculer I_n.

□ **Exercice 16** Soit $a \in]0,+\infty[$ et $k \in]1,+\infty[$. On considère $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ continue, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbf{R}$.

Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(kx)-f(x)}{x} \mathrm{d}x$ existe et la calculer.

□ **Exercice 17** Existence et calcul de $\displaystyle\int_{]0,1[} \frac{x-1}{\ln(x)} \mathrm{d}x$.

On pourra poser $u = \ln x$.

□ **Exercice 18** Soit $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}x$.

1) Existence de I.
2) Calcul de I. On pourra poser $x = 1+\cos\theta$ ou $u = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$.

□ **Exercice 19** Montrer que :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

C Intégrabilité avec des séries

□ **Exercice 20** Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $x \mapsto f(x) = e^{-x^2|\sin x|}$.

On pose pour n entier naturel : $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
2) La fonction f est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$?

□ **Exercice 21** Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x^2\sin(x)}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

1) Déterminer la limite de (I_n), un équivalent de (I_n), un développement asymptotique à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$ de I_n.
2) Quelle est la nature de la série $\sum I_n$?

□ **Exercice 22** Étudier l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2(x-\lfloor x\rfloor)}}\,\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 23** L'application $x \longmapsto e^{-x|\sin(x)|}$ est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$?

□ **Exercice 24** La fonction $f\ : x \longmapsto \frac{x^2\sin(x)}{1+x^3}$ est-elle intégrable sur $\mathbf{R}_+$?

□ **Exercice 25** Soit f une fonction continue sur $]0, +\infty[$, décroissante, intégrable sur $]0, +\infty[$.

1) Montrer que la série de fonctions : $\sum_{k\geqslant 1} f(kt)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, on note g la fonction somme.
2) Comparer $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} tg(t)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D Intégrales semi-convergentes

□ **Exercice 26** On pose pour tout entier n non nul,

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx)\mathrm{cotan}(x)\mathrm{d}x \text{ et } v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nx)}{x}\mathrm{d}x$$

(avec $\mathrm{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$)

1) Montrer que les intégrales u_n et v_n existent.
2) Montrer que u_n ne dépend pas de n.
3) On considère sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ la fonction $h : x \mapsto \mathrm{cotan}(x) - \dfrac{1}{x}$
   a) Montrer que h se prolonge par continuité en 0. On note encore h le prolongement.
   b) Montrer que h est alors une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$
4) Montrer que si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(px)\mathrm{d}x = 0$$

5) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

   On n'oubliera pas de justifier la convergence.

□ **Exercice 27**

1) En minorant $f : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x}$ sur des intervalles bien choisis, montrer que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
2) Existence des intégrales : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{3}} \sin x\, dx$.
3) Les fonctions intervenant ci-dessus sont-elles intégrables sur $[0, +\infty[$?
4) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ est définie pour tout $\alpha > 0$, alors que $g_\alpha : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
5) Étudier la nature des intégrales impropres $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x}\, dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x}\, dx$.

E Intégration des relations de comparaison

□ **Exercice 28** Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{\infty} e^{-t^2}\, dt$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x > 0, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2x} e^{-x^2}$
2) Montrer que $f(x) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x} e^{-x^2}$.

□ **Exercice 29** Déterminer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x^2} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{\sqrt{1 + t^2} \ln(1 + t^2)}\, dt$.

□ **Exercice 30** Soient a, b dans $\mathbf{R}$ tels que $0 < a < b$. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{1 - \cos(u)}{u^3}\, du$

□ **Exercice 31** Soit $a > 0$.

1) Étudier l'existence de $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + a}\, dx$.
2) Déterminer un équivalent de $I(a)$ quand a tend vers 0^+.
On pourra faire une intégration par parties ou un changement de variables.

□ **Exercice 32**

1) Déterminer $\displaystyle\lim_{a \to 0^+} \int_{[a, 3a]} \frac{\tan(x)}{x^2}\, dx$.
2) Déterminer $\displaystyle\lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \int_{]0, a]} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

□ **Exercice 33** Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\pi x) - \arctan(x)}{x}\, dx$.

□ **Exercice 34** Soit $u_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$.

1) Déterminer une suite simple (v_n) telle que $u_n \sim v_n$.
2) Montrer que $(u_n - v_n)$ converge. On note α sa limite. On ne cherchera pas à la calculer.
3) Montrer que $u_n - v_n - \alpha$ est équivalent à $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2 \ln(k)}$.
4) Déterminer un équivalent de $u_n - v_n - \alpha$.

F Théorèmes de Lebesgue

□ **Exercice 35** Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^2\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$.

□ **Exercice 36** Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x$.
Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

□ **Exercice 37** Soit $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$. Étudier la convergence et la limite de la suite (u_n).

□ **Exercice 38** soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^n}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que : $\forall x \in [0,1]$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leqslant \frac{\pi}{2}(1-x)$.
2) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

□ **Exercice 39** Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1) Justifier l'existence de la suite (u_n) puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
2) Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 40**

1) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.
2) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 41**

Soit la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x^2}{2n}\right)^n & \text{si} \quad x \in [-\sqrt{2n}, \sqrt{2n}] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbf{R} \setminus [-\sqrt{2n}, \sqrt{2n}] \end{cases}$$

Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbf{R}$, et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
On rappelle l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ *vaut* $\sqrt{\pi}$.

□ **Exercice 42** Soit $f_n(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}$.

1) Etudier l'intégrabilité de f_n sur $]0,+\infty[$.
2) Existence et valeur de la limite quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = n\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3) En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 43** Soit $n > 2$ et $f_n : [1,+\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x)^n}$.

1) Montrer que f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
2) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
3) Montrer que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et calculer sa somme.

□ **Exercice 44** Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} xe^{-nx}$ avec x réel.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Calculer $f(x)$.
3) Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} f(x)\,\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 45**

1) Justifier que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$ existe et la calculer.
2) En écrivant $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ sous la forme d'une série, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

□ **Exercice 46** Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(= \frac{\pi^2}{6} \right)$$

□ **Exercice 47** Démontrer l'égalité suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

□ **Exercice 48** Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

□ **Exercice 49** Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^n+1}\,\mathrm{d}x$.

1) Déterminer $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2) Déterminer un équivalent simple de $u_n - \ell$.
   On pourra utiliser une intégration par partie.
3) Montrer que : $u_n = \ell + \frac{a}{n} + \frac{J}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où J est une intégrale qu'on explicitera.
4) Montrer que $J = \frac{\pi^2}{12}$, en commençant par montrer que J est la somme d'une série.

□ **Exercice 50** Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_{[0,+\infty[} \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et donner un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$.

□ **Exercice 51** Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_{[1,+\infty[} \frac{1}{t^x(1+t)}\,\mathrm{d}t$.
Déterminer le domaine de définition de f et donner un équivalent simple de f au voisinage de 0 et de $+\infty$.

□ **Exercice 52** Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Déterminer sa limite en 0^+ puis un équivalent simple en 0^+.
   On pourra utiliser que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

G Divers

□ **Exercice 53** Étudier l'existence des intégrales suivantes :

$$a)\quad \int_{[0,+\infty[} e^{\sin(x)}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad b)\quad \int_{]0,1]} \frac{1}{\arccos(1-x)}\,\mathrm{d}x$$
$$c)\quad \int_{[1,+\infty[} \ln\left(\frac{x+1}{x}+\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-1}\right)\mathrm{d}x \qquad\qquad d)\quad \int_{[1,+\infty[} e^{-x\sin(x)}\,\mathrm{d}x$$

□ **Exercice 54** Soit $a, b \in \mathbf{R}$. Étudier, en fonction des paramètres, l'existence des intégrales suivantes :

$$a)\quad \int_{]0,1[} \frac{1}{\sqrt{x^a-x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad b)\int_{]0,+\infty[} \frac{x^a}{1+x^b}\,\mathrm{d}x \qquad c)\quad \int_{[0,+\infty[} x^a e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

□ **Exercice 55** Soit $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$. Existence et calcul de $F_n(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

□ **Exercice 56** Déterminer tout les polynômes de $\mathbf{R}_4[X]$ tels que $\sqrt{P(x)}-(x^2-x+1)$ soit intégrable sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 57** Etudier l'existence de $I(r,s) = \displaystyle\int_{]0,1[} x^r\left(\ln\frac{1}{x}\right)^s \mathrm{d}x$ où $(r,s) \in \mathbf{R}^2$. Calculer $I(r,s)$ pour $s \in \mathbf{N}^*$.

□ **Exercice 58** Calculer les intégrales suivantes :

$$a)\quad \int_{]0,1[} \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ où } a \in \mathbf{R} \qquad b)\quad \int_{]0,+\infty[} \frac{\ln(x)}{(x+a)^2}\,\mathrm{d}x \text{ où } a > 0$$
$$c)\quad \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2}\,\mathrm{d}x \qquad d)\quad \int_{[2,+\infty[} \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

□ **Exercice 59** Montrer l'existence de l' intégrale suivante et établir le résultat fourni :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+ixy)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{1+|y|} \qquad (y \in \mathbf{R})$$

□ **Exercice 60** Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{n^3x^3+n+2}\,\mathrm{d}x$.
Déterminer la nature de la série de terme général I_n.

□ **Exercice 61**
Soit $a > 0$ et $I(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2}\,\mathrm{d}x$
Etudier la limite de $I(a)$ et déterminer un équivalent simple de $I(a)$ quand $a \to \infty$. Mêmes questions quand $a \to 0^+$.

□ **Exercice 62** Soit $f \in \mathscr{C}([1,+\infty[,\mathbf{R}_+)$. On suppose qu'il existe deux réels a et b positifs tels que : pour tout x de $[1,+\infty[$: $f(x) \leqslant a\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + b$.
Montrer que f est bornée sur $[1,+\infty[$.

□ **Exercice 63** Montrer que $x \longmapsto \frac{\sin^3(x)}{x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 64** Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $[0,+\infty[$, telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall\, x \geqslant 0\ ,\ f'(x) \geqslant \alpha$. Montrer que $x \longmapsto \frac{f(x)}{x^2}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.

□ **Exercice 65**

1) Soit $f\ :\ ]0,1] \longrightarrow [0,+\infty[$, continue, décroissante et intégrable sur $]0,1]$. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right) = \displaystyle\int_{]0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)^{\frac{1}{n^2}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$.

□ **Exercice 66** Soit $f\ :\ [0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)} = p > 0$$

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} f(x)\,\mathrm{d}x$, et donner un équivalent de $\displaystyle\int_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de p et de $f(n)$.

□ **Exercice 67** Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbf{R}$, à valeurs strictement positives. On suppose que f n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}$. Pour tout a dans $\mathbf{R}$, on définit l'application F_a de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par : $F_a(x) = \displaystyle\int_{a-x}^{a+x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que F_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, calculer sa dérivée. Montrer que F_a est impaire, et dresser son tableau de variation en précisant ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.

2) Montrer que pour tout a dans $\mathbf{R}$, il existe un unique $x_a \in \mathbf{R}$ tel que $F_a(x_a) = 1$. On pose, dans la suite, $g(a) = x_a$.

3) On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell > 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \dfrac{1}{2\ell}$.

□ **Exercice 68** (Inégalité de Wirtinger) Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1];\mathbf{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)f'(t)\frac{\cos\pi t}{\sin\pi t}\,\mathrm{d}t$ existe, et montrer que :

$$\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \geqslant \pi^2\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

On pourra étudier $\displaystyle\int_0^1\left(f'(t) + a\frac{\cos\pi t}{\sin\pi t}f(t)\right)^2\mathrm{d}t$ *, où* a *est un réel bien choisi.*

□ **Exercice 69** Soit la fonction : $f\ :\ x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

2) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

3) Effectuer deux intégrations par parties pour obtenir deux expressions différentes de $f(x)$.

4) Déterminer un équivalent de f en 0, puis un développement asymtotique à deux termes de f en 0.

5) Déterminer un équivalent de f en $+\infty$, puis un développement asymtotique à deux termes de f en $+\infty$ en utilisant l'autre expression.

6) Montrer que f est intégrable sur $[1,+\infty[$.

7) Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$.

8) Calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$.
On pourra procéder à une intégration par parties.

□ **Exercice 70** Étudier l'existence et déterminer la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$

□ **Exercice 71** Soit (a_n) une suite de réels tels que : $\forall\theta\in\mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sin(n\theta)=0$.
Montrer que la suite (a_n) converge vers 0.
On pourra raisonner par l'absurde.

□ **Exercice 72** Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1(1-\sqrt[n]{x})^n\,\mathrm{d}x.$

□ **Exercice 73** Soit $f_n : x\longmapsto\begin{cases}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} & \text{si} \quad x\in[0,n]\\ 0 & \text{si} \quad x>n\end{cases}$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x.$

□ **Exercice 74** Soit $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}x$, $n\in\mathbf{N}^*$.

1) Existence de I_n ?
2) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=\int_0^1\frac{1-e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$

□ **Exercice 75** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}x.$

□ **Exercice 76** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\frac{\pi}{2}}e^{-n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}\,\mathrm{d}x.$

□ **Exercice 77** (Intégrales de Wallis et intégrale de Gauss)

1) Soit $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, pour $n\in\mathbf{N}$.
   a) Montrer que : $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$
   b) Sans calculer I_n, montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
   c) Montrer que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, et strictement positive.
   d) Calculer I_n (former une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}), donner plusieurs écritures de I_n.
   e) Justifier que : $\forall\, n\in\mathbf{N}$, $\frac{I_{n+2}}{I_n}\leqslant\frac{I_{n+1}}{I_n}\leqslant 1$, et en déduire la limite de la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$.
   f) Montrer que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante, donner la valeur de cette constante.
   g) Déduire des deux questions précédentes que : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
2) Calculer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de $J_n=\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t.$

   En utilisant les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\, d\theta$ calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

□ **Exercice 78**

1) Montrer que : $\forall\, n\in\mathbf{N}^*, \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\leqslant e^x$.
2) Déterminer la limite en $+\infty$ de $u_n=\displaystyle\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x.$

□ **Exercice 79** Existence de $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t\ln(1-t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Exprimer I à l'aide de la somme d'une série.

□ **Exercice 80** Montrer que pour $x \in]-1,1[$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2} = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$.

□ **Exercice 81** Soit $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^\alpha)\,dt$, où $\alpha > 0$.

1) Etudier l'existence de $I(\alpha)$; écrire $I(\alpha)$ comme somme d'une série.
2) Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha)$.
3) Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$, et un équivalent de $I(\alpha)$ en $+\infty$.

□ **Exercice 82** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, on pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{\operatorname{ch}(t)-1}\,dt$

1) Pour quelles valeurs du paramètre $\alpha \in \mathbf{R}$ l'intégrale $I(\alpha)$ existe-t-elle ?
2) En écrivant $\frac{t^\alpha}{\operatorname{ch}(t)-1}$ sous forme d'une série en e^{-t}, exprimer $I(\alpha)$ en fonction de $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ et $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

□ **Exercice 83** Démontrer la relation

$$\int_0^1 \frac{\ln x \ln(1-x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

□ **Exercice 84** Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(t)e^{-2t}}{t}\,dt$.

□ **Exercice 85** Soit la suite u_n définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 2\sqrt{u_n}\sqrt{1+u_n}$.

1) Montrer que : $\displaystyle\int_{u_n}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int_{u_{n+1}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$
2) En déduire un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 86** Soit $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n+1}\,dx$.

1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
2) Montrer que $1 - v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n - x^{n-2}}{x^n+1}\,dx$.
3) Montrer que : $v_n = 1 + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

□ **Exercice 87** Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbf{R})$ telle que $f(0) = 1$, et $\forall x \in]0,1]$, $|f(x)| < 1$.
On suppose aussi que f est dérivable à droite en 0, et que $f'_d(0) = -k$, avec $k > 0$.
Déterminer un équivalent de $u_n = n\displaystyle\int_0^1 f(x)^n\,dx$ quand n tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 88** Soit la fonction f continue et intégrable sur $\mathbf{R}_+$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

1) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $t \longmapsto f(t)e^{-nt}$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$.
2) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\,dt = 0$.
3) Soit $\eta > 0$. Montrer que la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $n\displaystyle\int_\eta^{+\infty} f(t)e^{-nt}\,dt$ est nulle.
4) Montrer que la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $n\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\,dt$ vaut $f(0)$.

□ **Exercice 89** Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+|x-n|}$.

1) Etudier la convergence de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbf{R}$.
2) Montrer que f_n est de carré intégrable sur $\mathbf{R}$ et calculer $\int_{\mathbf{R}} |f_n(x)|^2 \, dx$.
3) Soit $g \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ de carré intégrable sur $\mathbf{R}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x) g(x) \, dx = 0$

□ **Exercice 90** Soit $f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow]0, +\infty[$ une application de classe $\mathscr{C}^1$.
On suppose que : $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x}$, où $\alpha > 0$.

1) Soit $m > 0$; déterminer la limite quand t tend vers $+\infty$ de $\frac{f(mt)}{f(t)}$.
2) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} e^{-tn} f(n)$ converge pour tout $t > 0$.
3) Déterminer $\lim\limits_{t\to 0} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-tn} f(n)$.
4) Montrer que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-tn} f(n) \underset{t\to 0^+}{\sim} \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) \, dx$.
5) Montrer que : $\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) \, dx \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)$ où $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt$.

□ **Exercice 91** En utilisant une comparaison à une série, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^3 \sin^2 x} \text{ diverge, alors que } \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^6 \sin^2 x} \text{ converge.}$$

□ **Exercice 92** Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose : $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt + t^2} \, dt$.

1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2) Déterminer un équivalent simple de u_n.

□ **Exercice 93** Soit $f : [0,1] \Rightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, et $\forall x \in]0,1[, f(x) > 0$.
on suppose que $\left|\frac{f''}{f}\right|$ est intégrable sur $]0,1[$. Soit $M = \sup\limits_{[0,1]} f$. Soient $a, b \in]0,1[$ tels que $a < b$.

1) Montrer que $\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geqslant \frac{1}{M} |f'(b) - f'(a)|$.
2) En déduire qu'il existe a, b dans $]0,1[$ tels que : $\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geqslant 4$.

□ **Exercice 94** Donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)\cdots(x^2+n)} \, dx$$

□ **Exercice 95** Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et des réels $a_1, \cdots, a_n, p_1, \cdots, p_n$ tels que

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n \quad \text{et} \quad p_1 > 0, \cdots, p_n > 0$$

1) Représenter graphiquement $\varphi : x \longmapsto x - \sum\limits_{j=1n}^{n} \frac{p_j}{x-a_j}$.
2) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ intégrable sur $\mathbf{R}$.
Donner un sens $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(t)) \, dt$, et la calculer.
3) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2} - \frac{p^2}{2t^2}} \, dt$, $p > 0$ puis $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}} e^{-st-\frac{p}{t}} \, dt$, $s > 0, p > 0$.

CHAPITRE 4

Réduction I

1 Applications du cours

A Réduction de matrices de petite taille

□ **Exercice 1** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} - a & 1 + a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbf{R}$.
La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres ? La diagonaliser ou la trigonaliser.

□ **Exercice 2** Etudier la diagonalisabilité de la matrice : $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(a) & b \operatorname{sh}(a) \\ \frac{\operatorname{sh}(a)}{b} & \operatorname{ch}(a) \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}^*$.

□ **Exercice 3** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer $\operatorname{rg}(A)$, $\det(A)$, $\operatorname{Ker}(A)$ et les éléments propres de A.

□ **Exercice 4** Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 5** Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 0 \\ -5 & -6 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe α et β tels que A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 6** Etudier la diagonalisabilité de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($a \in \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), et la diagonaliser quand c'est possible.

□ **Exercice 7** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 \\ 4 & -4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.
Sans aucun calcul donner le plus d'informations possible sur A (rang, éléments propres...).

□ **Exercice 8** Rechercher les valeurs propres (réelles, puis complexes) et les sous-espaces propres associés des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$? dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$? Si ce n'est pas le cas, les trigonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 9** Rechercher les valeurs propres (réelles, puis complexes) et les sous-espaces propres associés des matrices suivantes. Sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$? dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$? Si ce n'est pas le cas, les trigonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 10** Rechercher les valeurs propres (réelles, puis complexes) et les sous-espaces propres associés des matrices suivantes ; sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$? dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$? si ce n'est pas le cas, les trigonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & -3 & -5 \\ 4 & -4 & -1 & -4 \\ -4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -13 & 8 & 7 & 16 \\ -8 & 6 & 4 & 9 \\ -7 & 6 & 3 & 8 \\ -4 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 6 & -1 & -8 & -4 \\ -6 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 11** Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$
Montrer que l'on peut choisir a et b pour que les deux matrices soient semblables. Déterminer la matrice de passage.

□ **Exercice 12** Diagonaliser la matrice suivante, dans le cas où elle est diagonalisable :
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (a \in \mathbf{C})$,

□ **Exercice 13** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Sans aucun calcul déterminer les éléments propres de A et sa diagonalisabilité.

□ **Exercice 14** Pour $k \in \{0,1,2,3,4\}$, on pose $f_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f_k : x \mapsto e^{kx}$.
On considère $E = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$ et $\varphi : E \to E$ définie par

$$\varphi : f \mapsto f'' - 3f' + 2f$$

1) Vérifier que pour tout $f \in E$, $\varphi(f)$ appartient bien à E et que φ est linéaire.
2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

B Réduction de matrices

□ **Exercice 15** Soit $n \geqslant 1$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{R})$, avec $a_{ij} = \begin{cases} a & \text{si} \quad i+j \text{ est pair} \\ b & \text{si} \quad i+j \text{ est impair} \end{cases}$.
On note u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{2n}$canonique associé à A.
Soit $u_1 = e_1 + e_3 + \cdots + e_{2n-1}$, $u_2 = e_2 + e_4 + \cdots + e_{2n}$ où $(e_1, e_2, \cdots, e_{2n})$ est la base canonique de $\mathbf{R}^{2n}$.

1) Montrer que u stabilise $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Montrer que $(u_1, u_2, e_3, \cdots, e_{2n})$ est une base de $\mathbf{R}^{2n}$ et écrire la matrice de u dans cette base.
2) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

□ **Exercice 16** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $a_{ij} = 1$. La matrice A est-elle diagonalisable ? Donner le spectre de A et l'ordre de multiplicité des valeurs propres. Donner un vecteur propre associé à la valeur propre simple.

□ **Exercice 17** Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & . & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
Donner ses valeurs propres, réduire A, en déduire $\det(A)$.

□ **Exercice 18** Soit $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{C}$; soit un scalaire $a \in \mathbf{K}$. Etudier la diagonalisabilité et étudier les éléments propres de la matrice carrée d'ordre n :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 19** Soit $k \in \mathbf{R}$. Déterminer les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ k & \cdots & k & 1 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 20** Soit $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{C}$; soient des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Étudier la diagonalisabilité de la matrice carrée d'ordre n :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 21** Soit $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{C}$; soient des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$. Etudier la diagonalisabilité de la matrice carrée d'ordre n :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

C Trigonalisation

□ **Exercice 22** Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair. Calculer $\det(A)$ et $\operatorname{tr}(A)$.

□ **Exercice 23** Soient $n \in \mathbf{N}^\star$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^4 + 5A^2 + 4I_n = 0$. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

□ **Exercice 24** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$; Montrer que $\det(A) > 0$.

□ **Exercice 25** Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$. Montrer que $\operatorname{tr}(A)$ appartient à $\mathbf{Z}$.

D Matrices et endomorphismes nilpotents

□ **Exercice 26** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice nilpotente de rang $n-1$.

Montrer que $A^{n-1} \neq 0$. En déduire que A est semblable à $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

□ **Exercice 27** Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à : $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer N^5.
2) Déterminer les valeurs propres de f.
3) Déterminer le polynôme caractéristique de f.
4) Calculer $\det(I_5 + N)$.
5) Donner l'expression de l'inverse de $I_5 + N$ en fonction de N.

□ **Exercice 28**

1) Montrer que si f est un endomorphisme de E, alors si k est un entier naturel, alors :
   a) $\operatorname{Ker}(f^k) \subset \operatorname{Ker}(f^{k+1})$
   b) $(\operatorname{Ker}(f^k) = \operatorname{Ker}(f^{k+1})) \Longrightarrow (\forall\, m \geqslant k\,,\ \operatorname{Ker}(f^k) = \operatorname{Ker}(f^m))$
   c) $\operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k)$.

   Dorénavant, E est de dimension finie $n > 0$.
2) Montrer qu'un endomorphisme nilpotent n'est pas injectif .

3) Dans les questions c) et d), on suppose que f est un endomorphisme nilpotent autre que $0_{\mathscr{L}(E)}$.
On rappelle que l'indice de nilpotence de f est l'unique entier naturel p tel que :

$$f \neq 0_{\mathscr{L}(E)} \;,\; f^2 \neq 0_{\mathscr{L}(E)} \cdots\cdots f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)} \;,\; f^p = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad (p \geqslant 2)$$

Montrer que : $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \subset \cdots\cdots \subset \mathrm{Ker}(f^p) = E$.
Montrer que toutes ces inclusions sont strictes . En déduire : $p \leqslant n$.

4) Soit u un vecteur de E tel que : $f^{p-1}(u) \neq 0_E$
Montrer que la famille $\left(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u)\right)$ est libre .
Retrouver alors que l'on a : $p \leqslant n$.

5) Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout entier naturel k compris entre 1 et n , on pose : $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_k)$.
On suppose que f est un endomorphisme de E tel que :

$$f(e_1) = 0_E \qquad et \qquad \forall k \in \{2, \ldots, n\} \quad f(e_k) \in F_{k-1}$$

Montrer que f est nilpotent.

6) Etablir l'équivalence des propriétés suivantes :
i) f est nilpotent ii) $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$
iii) il existe une base où la matrice de f est triangulaire supérieure avec diagonale nulle.

E Matrices définies par blocs

□ **Exercice 29** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline -A & I_n \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{C})$

1) Etudier les éléments propres de M en fonction de ceux de A^2.
2) Démontrer l'équivalence suivante :

$$(A \text{ est diagonalisable}) \iff (A^2 \text{ est diagonalisable}) \iff (M \text{ est diagonalisable})$$

3) Que dire si A n'est pas inversible ?

□ **Exercice 30** Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Il s'agit de démontrer que le polynôme caractéristique de AB est égal à celui de BA, pour cela, calculer CD et DC avec $C = \left(\begin{array}{c|c} A & XI_n \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right)$ et $D = \left(\begin{array}{c|c} B & -XI_n \\ \hline -I_n & A \end{array}\right)$.

F Calculs de puissances

□ **Exercice 31** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ $(n \geqslant 2)$ telle que : $\begin{cases} \forall\, i = 1, \ldots, n & a_{ii} = \alpha + \beta \\ \forall\, i \neq j & a_{ij} = \beta \end{cases}$

1) Déterminer ses éléments propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2) Calculer les puissances de A.
3) Quelles sont les matrices A inversibles ? Déterminer alors A^{-1}.

□ **Exercice 32** Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & (X^2 - 1)P'' + 2XP' \end{array}$$

1) Justifier la linéarité de f et déterminer la matrice M de f dans la base canonique.

2) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

3) Déterminer M^n pour $n \in \mathbf{N}$.

□ **Exercice 33** Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Déterminer les suites (a_n), (b_n) et (c_n) telles que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, \quad A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3$$

G Matrices semblables

□ **Exercice 34** Montrer que pour tout réel a les matrices A_a et B_a sont semblables avec :

$$A_a = \begin{pmatrix} 4-a & 1 & -1 \\ -6 & -1-a & 2 \\ 2 & 1 & 1-a \end{pmatrix} \quad , \quad B_a = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

□ **Exercice 35** Soient : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soient $A' = A - I_4$ et $B' = B - I_4$.

1) Montrer que A' et B' sont semblables.

2) Montrer que A et B sont semblables.

□ **Exercice 36** Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

□ **Exercice 37** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telle que $A^2 = -I$. Montrer que A est semblable dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ à $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 38**
Soient M et M' des matrices appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ non nulles et nilpotentes : montrer que M et M' sont semblables.
On pourra commencer par montrer que $M^2 = 0$.

H Divers

□ **Exercice 39** Soit S l'espace vectoriel des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle linéaire :

$$f'' + f' + f = 0$$

1) Montrer que : $D : f \longmapsto f'$ est un endomorphisme de S.

2) Déterminer D^3. L'endomorphisme D est-il diagonalisable ?

□ **Exercice 40** Soient $E = \mathbf{R}_{2n}[X]$, $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. On considère

$$f: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & (X^2-1)P' - 2(nX+a)P \end{array}$$

1) Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.
2) Déterminer les éléments propres de $f\cdot$

□ **Exercice 41** Soit $a \in \mathbf{R}^*$ et soit u l'application de $\mathbf{R}_n[X]$ dans lui même qui à $P(X)$ associe $P(X-a)$. Déterminer les éléments propres de u.

I Commutants, racines

□ **Exercice 42** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est diagonalisable. On appelle D une matrice diagonale semblable à A.
2) Montrer que (I_3, D, D^2) est une base du sous-espaces vectoriel des matrices diagonales de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.
3) Soit M un élément de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   i) $AM = MA$
   ii) il existe a, b, c éléments de $\mathbf{R}$ tels que $M = aI_3 + bA + cA^2$

□ **Exercice 43** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4i \end{pmatrix}$.

1) Déterminer $C(A) = \{X \in \mathscr{M}_3(\mathbf{C}) / XA = AX\}$.
2) Déterminer $R(A) = \{X \in \mathscr{M}_3(\mathbf{C}) / X^2 = A\}$.

□ **Exercice 44**

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = A$. Montrer que M est diagonalisable.
2) Résoudre $M^2 = A$.

□ **Exercice 45** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?
2) Déterminer le commutant de A.
3) Calculer les puissances de A

J Endomorphismes d'espaces de matrices

□ **Exercice 46** Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $f : M \mapsto M^\top$.

1) Etudier la diagonalisabilité de f et ses éléments propres.
2) Déterminer $\det(f)$ et $\operatorname{tr}(f)$.

□ **Exercice 47** Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $f : M \mapsto M^\top - M$.
Etudier la diagonalisabilité de f et ses éléments propres.

2 Exercices plus élaborés

A Réduction de matrices de petite taille

□ **Exercice 48** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c, d, e, f) pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ soit diagonalisable.

□ **Exercice 49** Déterminer a, b, c, d pour que $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ait une valeur propre d'ordre de multiplicité 5.

B Réduction de matrices

□ **Exercice 50** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses directions propres.
On pourra dans un premier temps supposer les a_i deux à deux distincts.

□ **Exercice 51** Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $C = AB^\top$.

1) Déterminer le rang et la trace de C.
2) Déterminer le polynôme caractéristique de C.
3) La matrice C est-elle trigonalisable ?
4) La matrice C est-elle diagonalisable ?

□ **Exercice 52** Soit $X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbf{K})$, non nul et $A = XX^\top$. La matrice A est-elle diagonalisable ? Discuter selon que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

□ **Exercice 53** On considère n nombres complexes non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et M la matrice : $M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_n \\ a_1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les cas où M est diagonalisable, et donner alors une matrice diagonale à laquelle elle est semblable.

□ **Exercice 54** Diagonaliser la matrice suivante, dans le cas où elle est diagonalisable : $\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$

$((a, b) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^*)$

□ **Exercice 55** Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $MX = \lambda X$. On pose $x_0 = x_{n+1} = 0$.

   Déterminer une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite finie $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1}$.

2) En déduire les valeurs propres et vecteurs propres de M.

3) La matrice M est-elle diagonalisable ?

□ **Exercice 56** Soit $A = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & b_3 & & \vdots \\ \vdots & b_2 & a_3+b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & a_n+b_n \end{pmatrix}$ telle que :

$$\forall\, i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]\,;\ ,\ \ b_i > 0\ \ ;\ \ \forall\, i,j \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]\,;\ ,\ \ i \neq j \Longrightarrow a_i \neq a_j$$

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

□ **Exercice 57** Soit A_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & 1 & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que
$$P_n(x) = \det(A_n - xI_n) = (-1)^n\big((x-1)^n - x^{n-2}\big).$$

2) Montrer que P_n possède une unique racine strictement supérieure à 1, notée λ_n.

3) Montrer $\lambda_n \sim \frac{n}{2\ln n}$.

□ **Exercice 58** (Matrices de permutations II) Soit n un entier strictement positif et σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$.
On note $P_\sigma \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (P_\sigma)[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit σ, σ' deux permutations de $\mathfrak{S}_n$. Elles sont dites conjuguées s'il existe une permutation τ telle que $\sigma' = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$.

1) Vérifier que pour σ, σ' dans S_n, $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$.

2) Montrer que si σ et σ' sont conjuguées alors P_σ et $P_{\sigma'}$ sont semblables.

3) Réciproquement, soit σ et σ' deux permutations telles que P_σ et $P_{\sigma'}$ soient semblables. On note $c_1(\sigma)$ (resp. $c_1(\sigma')$) le nombre de points fixes de σ (resp. σ'). Pour tout entier k compris entre 2 et n, on note $c_k(\sigma)$ (resp. $c_k(\sigma')$) le nombre de k-cycles dans la décomposition de σ (resp. de σ') en cycles à supports disjoints.

a) Montrer que $\chi_{P_\sigma} = \prod_{k=1}^{n} (X^k - 1)^{c_k(\sigma)}$. On pourra montrer que P_σ est semblable à une matrice diagonale par blocs d'une forme intéressante.

b) En déduire que

$$\forall m \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{m|k} c_k(\sigma) = \sum_{m|k} c_k(\sigma')$$

puis que

$$\forall m \in [\![1, n]\!], \quad c_m(\sigma) = c_m(\sigma')$$

c) Soit $\gamma = (a_1, \ldots, a_p)$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Calculer $\tau \circ \gamma \circ \tau^{-1}$.

d) En déduire que σ et σ' sont conjuguées.

C Matrices et endomorphismes nilpotents

□ **Exercice 59** Soit $n \geqslant 1$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) < n$ si et seulement si A est équivalente à une matrice nilpotente.

□ **Exercice 60** Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension fini et u, v deux endomorphismes de E. On suppose que v est nilpotent et $u \circ v = v \circ u$. Montrer que :

1) $(u + v)$ est inversible $\iff$ u est inversible.
2) $\det(u + v) = \det(u)$
On pourra commencer par traiter le cas où u est inversible.

□ **Exercice 61** Soient A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $A + tB$ soit nilpotente pour $n + 1$ scalaires t distincts. Montrer que A et B sont nilpotentes.

D Sous espaces stables

□ **Exercice 62** Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et u son endomorphisme canoniquement associé à A. Montrer qu'un plan P d'équation $ax + by + cz = 0$ est stable par u si et seulement si le vecteur $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ est vecteur propre de $A^\top$.

□ **Exercice 63** Trouver tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ stables par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 64** Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n)$ ($n \geqslant 2$) tel que $f \circ f = -\mathrm{id}$. On pose $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que n est pair.
2) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = C = \begin{pmatrix} H & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & H \end{pmatrix}$$

On propose trois méthodes :

a) Diagonaliser $A = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f)$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, et en déduire une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est C.

b) Soit e_1 un vecteur non nul. Montrer que $(e_1, f(e_1))$ est libre. Soit e_2 un vecteur tel que $(e_1, f(e_1), e_2)$ soit libre. Montrer que $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est libre. Itérer et conclure.

c) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = D = \left(\begin{array}{c|c} H & L \\ \hline 0_{n-2,2} & A' \end{array}\right)$$

Montrer que D est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} H & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & B \end{array}\right)$.

Montrer que $B^2 + I_{n-2} = 0$, itérer et conclure.

□ **Exercice 65** Soit D l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ défini par $D : P \mapsto P'$.
Déterminer tous les sous-espaces-vectoriels de $\mathbf{R}_n[X]$ stables par D.

E Matrices semblables

□ **Exercice 66** Démontrer que deux matrices réelles A et B semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ le sont également dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
On pourra considérer l'égalité $A(P_1 + iP_2) = (P_1 + iP_2)B$ où P_1 et P_2 sont réelles, puis l'application $t \mapsto det(P_1 + tP_2)$.

□ **Exercice 67** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ admettant pour valeurs propres $a + ib$ et $a - ib$, a et b étant deux réels, b non nul. Montrer que A est semblable dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ à $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 68** Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $C = AB - BA$.

1) Montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbf{R}^*$ tel que $C = AB - BA = \alpha B$ alors B est nilpotente.
On pourra calculer $AB^k - B^kA$ pour $k \in \mathbf{N}^*$ puis considérer

$$\varphi : M \mapsto AM - MA$$

2) **Applications** : soient $A, B, C \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ non toutes nulle telles que :

$$AB - BA = 2B \quad , \quad AC - CA = -2C \quad , \quad BC - CB = A$$

a) Montrer que $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$.

b) Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que B est semblable à $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis que A est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et en déduire que A est diagonalisable. Reprendre alors les hypothèses en utilisant une base de diagonalisation de A

F Divers

□ **Exercice 69** Soit

$$\mathscr{S} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}); \forall (i,j)\ m_{i,j} \geqslant 0, \forall j\ \sum_{i=1}^{3} m_{i,j} = 1\}.$$

1) Montrer que 1 est valeur propre de tout élément de $\mathscr{S}$.
2) Si $M \in \mathscr{S}$ vérifie de plus $m_{i,j} > 0$ pour tout (i,j), montrer qu'alors 1 est valeur propre simple de M.

□ **Exercice 70** Soit E un $\mathbf{K}$−espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, u et v deux endomorphismes de E ayant chacun n valeurs propres deux à deux distinctes.
Montrer que u et v commutent si et seulement s'ils ont mêmes vecteurs propres.

□ **Exercice 71** Dans $E = \mathbf{R}_n[X]$, soit A un polynôme fixé de E, de degré d non nul, et φ l'application

$$P \mapsto \varphi(P) = (AP)^{(n)}$$

1) Montrer que φ est un endomorphisme de E, injectif si et seulement si $d = n$
2) Décrire la matrice de φ dans la base canonique de E, et en déduire les valeurs propres de φ.
3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur d pour que φ soit diagonalisable.

□ **Exercice 72** Soit A un polynôme à coefficients réels de degré 2 donné. Au polynôme P de degré inférieur ou égal à $2n$ on fait correspondre le polynôme $Q = AP' - nA'P$.
1) Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme Φ de $\mathbf{R}_{2n}[X]$.
2) Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ dans les cas particuliers :
   a) $A = X^2 - 1$
   b) $A = X^2$
   c) $A = X^2 + 1$

□ **Exercice 73** Soit ψ l'application qui à $P \in E = \mathbf{R}[X]$ associe $\psi(P) = P(X+1) + P(X)$
1) Vérifier que $\psi \in \mathscr{L}(E)$. Trouver sa seule valeur propre et l'espace propre associé.
2) L'application ψ est-elle injective ? Peut-on dire que c'est un automorphisme de E ?
3) a) Montrer que si $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_n[X]$ est stable par ψ
   b) Montrer que l'induite ψ_n de ψ à $\mathbf{R}_n[X]$ est un automorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$
   c) Montrer que ψ est un automorphisme de E
4) Montrer qu'il existe une suite unique $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad \psi(P_n) = 2X^n$
   Degré de P_n ? Coefficient dominant ? Calculer P_0, P_1 et P_2. Comparer $P_n(0)$ et $P_n(1)$
5) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad P_n(1-X) = (-1)^n P_n(X)$

□ **Exercice 74** Soit $n \geqslant 1$. On pose $E = \mathbf{R}_{n-1}[X]$.
1) Montrer qu'il existe une famille $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que :

$$\forall P \in E \quad P(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k P(X+k)$$

2) On considère l'application $\Delta : P \in E \mapsto P(X+1) - P(X)$.
   Montrer que $\Delta \in \mathscr{L}(E)$. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$, $\mathrm{Im}(\Delta)$, $\Delta^m(P)$ pour $m \in \mathbf{N}^*$ et les nombres a_k.

□ **Exercice 75** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $B = \mathrm{Com}(A)^\top$. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.

□ **Exercice 76** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A.

□ **Exercice 77** (Matrices à diagonale strictement dominante-Théorème de Gerschgörin)
1) $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $n \geqslant 2$, telle que $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, $|\, a_{ii} \,| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |\, a_{ij} \,|$.
   Montrer que A est inversible .
2) Soit $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$; on pose, pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, $r_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |\, a_{ij} \,|$.

Montrer que, si : $\forall\, i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]\quad,\quad |\,\lambda - a_{ii}\,| > r_i$, alors $A - \lambda\, I$ est inversible.
En déduire que le spectre de A est inclus dans la réunion des disques de centre a_{ii} et de rayon r_i.

G Endomorphisme d'espaces de matrices

□ **Exercice 78** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. On considère $f : \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $f : A \mapsto \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$.

1) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
2) Etudier la diagonalisabilité de f et ses éléments propres.

□ **Exercice 79** Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, p un projecteur de E. On considère $\varphi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$ définie par $\varphi : f \mapsto \frac{1}{2}(p \circ f + f \circ p)$.
Vérifier que φ est linéaire ; déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ **Exercice 80** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le spectre de A.
2) Soit $B = \frac{1}{p} \sum\limits_{k=0}^{p-1} A^k$ ($p \in \mathbf{N}^*$). Montrer que :
(B est inversible) $\iff$ (n et p sont premiers entre eux)

□ **Exercice 81** (Matrices stochastiques)
On suppose que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, tous ses coefficients a_{ij} étant positifs, et telle que :

$$\forall i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!] \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

1) Montrer que les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1, et que 1 est valeur propre de A.
2) Si $X \in \mathbf{C}^n \backslash \{0\}$ est un vecteur propre associé à λ de module 1, avec $\|X\|_\infty = 1$, montrer que toute coordonnée de AX de module 1 est aussi coordonnée de X.
Montrer qu'un tel λ est racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

□ **Exercice 82** Soit $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$. On note $a(t) \leqslant b(t) \leqslant c(t)$ les valeurs propres réelles de $M(t)$.

1) Montrer que : $a(t) < 0 < b(t) < 2 < c(t)$.
2) Montrer que $a(t)$ tend vers 0 et $b(t)$ tend vers 2 quand t tend vers $+\infty$. Montrer que : $c(t) = t + \underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)$.
3) Montrer que si $n \geqslant 1$, $\mathrm{tr}\left(M(1)^n\right)$ est l'entier le plus proche de $c(1)^n + 1$.

CHAPITRE 5

Suites et séries de fonctions

A Type de convergence d'une suite de fonctions

□ **Exercice 1** Soit la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant n-1 \text{ ou } x \geqslant n+1 \\ x-n+1 & \text{si} \quad x \in [n-1, n] \\ n+1-x & \text{si} \quad x \in [n, n+1] \end{cases} \end{array}$$

1) Dessiner le graphe de f_1, f_5, f_{10}.
2) Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbf{R}$ de la suite de fonctions f_n.
3) Reprendre les mêmes questions pour les suites (g_n) et (h_n) définies par :

$$g_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant n-1 \text{ ou } x \geqslant n+1 \\ \frac{x-n+1}{n} & \text{si} \quad x \in [n-1, n] \\ \frac{n+1-x}{n} & \text{si} \quad x \in [n, n+1] \end{cases} \end{array}$$

$$h_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant n-1 \text{ ou } x \geqslant n+1 \\ n(x-n+1) & \text{si} \quad x \in [n-1, n] \\ n(n+1-x) & \text{si} \quad x \in [n, n+1] \end{cases} \end{array}$$

□ **Exercice 2** Etudier (convergence simple, convergence uniforme) les suites de fonctions suivantes (en cas de non convergence uniforme sur l'intervalle de définition, on cherchera éventuellement des sous-intervalles où il y a convergence uniforme) :

- Sur $[0, 1]$

$$a) \quad f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^4} \quad b) \quad f_n : x \mapsto \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} \quad c) \quad f_n : x \mapsto \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} \quad d) \quad f_n : x \mapsto \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}$$

- Sur $[0, +\infty[$

$$e) \quad f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+nx} \quad f) \quad f_n : x \mapsto nx^2e^{-nx} \quad g) \quad f_n : x \mapsto f_n(x) = nx^2e^{-\sqrt{n}x} \quad h) \quad f_n : x \mapsto \frac{x \sin \frac{x}{n}}{x+\frac{1}{n}}$$

□ **Exercice 3**

1) Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions f_n définies par $f_n : x \mapsto \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.
2) Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{2^n x}{1+n2^n x^2}\,\mathrm{d}x$.

□ **Exercice 4** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et $f_n : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $f_n : x \mapsto \left(1+\dfrac{x^2}{n^2}\right)^{-n^2}$.

1) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $\mathbf{R}_+$
2) Etudiez sa convergence uniforme de deux manières différentes :
   a) En étudier les variations des fonctions $f_n - f$ (où f désigne la limite simple de la suite (f_n)).
   b) En montrant d'abord qu'il y a convergence uniforme sur tout segment (on pourra utiliser, en le justifiant, que la fonction exponentielle est lipschitzienne sur $]-\infty,0]$ et un encadrement de $\ln(1+h)$ pour $h \in [0,b]$, à b fixé)

□ **Exercice 5** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $(g_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star, g_n : x \mapsto \frac{(f(x))^2}{\sqrt{(f(x))^2+\dfrac{1}{n}}}$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (g_n) sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 6** Type de convergence de la suite de fonctions (S_n) définies par : $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{e^{kx}}{k+n}$.

□ **Exercice 7** Soit $f_n : x \mapsto \frac{n^2 x}{(1+n^2x^2)^2}$.

1) Etudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3) Soit g une fonction continue sur $[0,1]$. On veut déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Nous allons le faire de deux méthodes différentes :
   — Réaliser le changement de variables $t = nx$ puis utiliser le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite.
   — Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)(g(x)-g(0))\mathrm{d}x = 0$.
   On pourra utiliser que la fonction $x \mapsto g(x)-g(0)$ est continue et s'annule en 0 *pour découper intelligemment l'intégrale en deux.*

□ **Exercice 8** Soit (f_n) la suite de fonctions définie par :

$$\forall\, x \in [0,\pi]\ ,\ f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x)$$

Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme de (f_n).

□ **Exercice 9** Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ (puis éventuellement sur des sous-intervalles de $[0,1]$) de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [0,1] \quad f_n(x) = n^\alpha e^{-nx} x^\beta$$

où α, β sont des réels sur lesquels on discutera.

□ **Exercice 10** Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad f_n(x) = \cos \frac{nx}{n+1}$$

□ **Exercice 11** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad , \quad f_n : x \mapsto n^\alpha \sin x \cos^n x$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n$. Qu'en penser ?

□ **Exercice 12** On considère la suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star \quad \forall t \in [0,1] \quad g_n(t) = n(n+1)t^{n-1}\sin(\pi t)$$

Comparer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Que peut-on en conclure quant à la convergence uniforme de la suite (g_n) ?

□ **Exercice 13** Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,1], \qquad f_n(x) = nx^n(1-x)$$

converge simplement et non uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle et que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

□ **Exercice 14** On pose $f_0 : t \mapsto 0$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et $t \geqslant 0$,

$$f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
2) Justifier que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbf{R}_+$.
3) Soit $a > 0$, montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

□ **Exercice 15** Montrer que la suite :

$$\begin{array}{cccc} f_n & : & [-1,1] & \to & \mathbf{R} \\ & & x & \to & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{array}$$

formée d'applications de classe $\mathscr{C}^1$, converge uniformément vers une application qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

□ **Exercice 16** Soit l'application f_n $(n \in \mathbf{N}^*)$:

$$\begin{array}{cccc} f_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & t & \longmapsto & nt^n \sin(\pi t) \end{array}$$

1) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

2) Soit l'application φ_n $(n \in \mathbf{N}^*)$:

$$\begin{array}{rccl} \varphi_n : & \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & t & \longmapsto & \tan(\pi t) + \frac{\pi t}{n} \end{array}$$

Etudier les variations de φ_n.
Montrer qu'il existe un unique élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, qu'on notera t_n, tel que $\varphi_n(t_n) = 0$.

3) Montrer que f_n atteint son maximum en t_n.

4) Etude d'un développement de t_n

   a) Exprimer, si n est naturel non nul, t_n à l'aide de la fonction arctan.

   b) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 1$, puis un équivalent de $t_n - 1$.
   Donner alors un développement de t_n à la précision $\frac{1}{n}$.

5) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$.

□ **Exercice 17** Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de fonctions définie sur $I = \mathbf{R}_+$. On suppose que

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n(0) = 0$
- La suite $(f_n' + 2f_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers l'application nulle.

Montrer que (f_n) converge uniformément vers $\tilde{0}$ sur I.

□ **Exercice 18** Soit la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0, 1]$ par $f_n : t \mapsto \dfrac{2nt^2}{2nt + 1}$.

1) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n).

2) Mêmes questions avec le suite de fonctions (g_n) :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], g_n(t) = 0 \text{ et } \forall t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right], g_n(t) = f_n(t) \sin\left(\frac{\pi}{t}\right)$$

B Étude du type de convergence d'une série de fonctions

□ **Exercice 19** Si $z \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose : $f_n(z) = \frac{z}{(1+|z|)^n}$

1) Montrer que la série $\sum f_n(z)$ est absolument convergente et calculer sa somme.

2) Soit $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\{z \in \mathbf{C} \ / \ |z| \geqslant a\}$.

□ **Exercice 20** Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout x dans $\mathbf{R}$, on pose $f_n(x) = \sin(x)(\cos x)^n$.

1) Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, \pi]$.

2) Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, \pi - a]$, avec $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3) Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, \pi]$.

□ **Exercice 21** Soit $f_n(t) = n \sin(t) \cos^n(t)$ avec $n \geqslant 1$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1) À t fixé, donner $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t)$.

2) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, \mathrm{d}t$. Que peut-on en déduire ?

□ **Exercice 22** Soit $R \in]-1, 1[$. Étudier la convergence normale et calculer la somme de la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \longmapsto R^n \cos(nx)$.

□ **Exercice 23** Etudier les convergences normale, simple et uniforme des séries de fonctions $\sum f_n$ définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{R}$. Préciser éventuellement s'il y a convergence normale ou uniforme sur des intervalles plus petits.

1) $I =]1, +\infty[\qquad f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^n}$

2) $I = \mathbf{R} \qquad f_n : x \mapsto \dfrac{x}{1+n^2x^2}$

3) $I = \mathbf{R} \qquad f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n^\alpha(1+n^2x^2)}$ discuter selon α

4) $I = [0, +\infty[\qquad f_n : x \mapsto nx.e^{-nx}.\sin x$

5) $I = [0, +\infty[\qquad f_n : x \mapsto x^\alpha.e^{-nx}$ où $\alpha > 0$

□ **Exercice 24** Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ définie par

$$\forall n \geq 2 \quad \forall x \in \mathbf{R} \quad u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$$

converge uniformément sur $\mathbf{R}++$, mais pas normalement.

□ **Exercice 25** Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{n} \\ x & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ \frac{1}{n} - x & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \end{cases} \end{array}$$

1) Dessiner le graphe de f_1, f_5, f_{10}
2) Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbf{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.
3) Etudier la convergence normale sur $\mathbf{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.
4) Etudier la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

□ **Exercice 26** Soit la fonction de variable réelle $f : x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$.

1) La série de fonction converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?
2) Étudier l'ensemble de définition, la continuité, la dérivabilité de f. Calculer f.

□ **Exercice 27** On pose $u_n(x) = \text{th}(x+n) - \text{th}(n)$.

1) Etudier la convergence simple de la série $\sum u_n$.
2) Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbf{R}$.
3) Déterminer un réel a tel que $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

□ **Exercice 28**

1) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout x dans $\mathbf{R}_+$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n!} e^{-x}$.
   a) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+$ et donner sa somme.
   b) $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbf{R}_+$?
   c) $\sum u_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}_+$?

□ **Exercice 29** Soit la série de fonctions $\sum f_n$ où : $\forall\, x \in \mathbf{R} \quad , \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{(1+|x|)^n}$.

1) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. Quelle est sa somme ?
2) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, où a est un réel strictement positif.
3) Montrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément ves l'application nulle sur $\mathbf{R}$. Qu'en conclure ?

□ **Exercice 30** Soit la série de fonctions $\sum f_n$ où : $\forall\, x \in [0,1] \quad , \quad f_n(x) = x^n(1-x)^n$.
Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum(f_n)$ sur $[0,1]$, calculer sa somme.

□ **Exercice 31** Soit $a > 0$, et f une fonction continue de $[0,a]$ dans $\mathbf{R}$. On définit la suite de fonctions (f_n) par : $f_0 = f$, et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in [0,a]$, $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Étudier la convergence (simple et uniforme) de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0}(f_n)$ et calculer sa somme.

□ **Exercice 32** Soit $g : x \mapsto e^{-x^2}$.

1) Montrer que : $\exists k \in [0,1[, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}, \ \ |g'(x)| \leqslant k$
2) Soit la suite de fonction (f_n) définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \ \ f_0(x) = x, \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad , \quad \forall\, x \in \mathbf{R}, \ \ f_n(x) = g(f_{n-1}(x))$$

   a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}(f_{n-1}(x) - f_n(x))$.
   b) Que peut-on en déduire pour la suite (f_n) ?

C Étude de fonctions définies comme la somme d'une série de fonctions

□ **Exercice 33** Pour tout entier naturel n non nul on pose

$$f_n : \begin{array}{ccc} [-\ln(2), +\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(1-e^{-x})^n}{n^2} \end{array}$$

On considère la série de fonctions : $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$

1) Montrer que la série de fonction converge simplement. On note f la fonction somme.
2) Montrer que f est continue sur $[-\ln(2), +\infty[$.
3) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\ln(2), +\infty[$, et calculer $f'(x)$.
5) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\ln(2), +\infty[$?

□ **Exercice 34** Soit f la fonction définie par

$$f \ : \ x \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.
2) Étudier de la continuité de f sur $\mathscr{D}_f$ et sa dérivabilité sur $\mathscr{D}_f \setminus \{0\}$
3) Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$ par deux méthodes.
4) Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.
   Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $f(x)$ en $+\infty$.

5) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.
On pourra utiliser la technique de comparaison à une intégrale.

6) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

□ **Exercice 35** Pour tout $n \geqslant 0$, on pose

$$f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$$

On considère la série de fonctions $\sum f_n$.

1) Étudier la convergence simple de cette série de fonctions. On note f sa somme.
2) Étudier la continuité de f puis sa dérivabilité.
3) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.
4) Reprendre l'exercice avec la suite de fonctions $\sum g_n$ où $g_n : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{1+n}$.

□ **Exercice 36** Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction $f \,:\, x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{(n^2+x^2)^2}$.
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.

□ **Exercice 37** Soit $f \,:\, x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2x^2}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Montrer que f est continue sur D_f.
2) Calculer, si elle existe, la limite de f en $+\infty$.
3) Montrer les inégalités suivantes pour $n \geqslant 1$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x^2(n+1)^2}\right) \leqslant \int_n^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) \mathrm{d}y \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{x^2n^2}\right)$$

4) En déduire une encadrement de f, puis un équivalent de f en 0.

□ **Exercice 38** Soit $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Etudier la continuité de f, puis la dérivabilité de f.
3) Calculer f.

□ **Exercice 39** Soit $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de S.
2) La fonction S est-elle continue sur D ?
3) La fonction S est-elle intégrable sur D ?

□ **Exercice 40** On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

1) Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbf{R}$. On note f sa somme.
2) Etudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbf{R}$.
Déterminer des sous-intervalles de $\mathbf{R}$ sur lesquels la série de fonctions converge normalement.
Que peut-on en déduire pour la continuité de f ?
3) Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbf{R}$.

4) Soit $x > 0$ fixé. Déterminer un encadrement de $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.
On pourra utiliser une comparaison série-intégrale.
En déduire un équivalent de $g(x)$ quand x tend vers 0.
Déterminer alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et en déduire que f n'est pas continue en 0.
5) Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

□ **Exercice 41** Soit la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ où $f_n : x \longmapsto \frac{1}{n}\cos^n(x)\sin(nx)$.

1) Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$. On note f sa somme.
Justifier que f est impaire et π périodique.
2) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$.
3) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0,\pi[$. En déduire f sur $]0,\pi[$. Tracer le graphe de f sur $\mathbf{R}$.
4) La fonction f est-elle continue sur $\mathbf{R}$?

□ **Exercice 42** Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition I de f.
2) La fonction f est-elle continue sur I ? de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ?
3) Déterminer la limite de f en 0, puis un équivalent de f en 0.

□ **Exercice 43** On pose, pour n entier naturel non nul : $u_n(x) = \frac{2x}{(n\pi)^2 - x^2}$.

1) Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$. Étudier la continuité de la fonction somme S sur $]-\pi,\pi[$.
2) Transformer $f(x) = \frac{1}{x} - S(x)$ comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} f_k(x)$, avec $f_n(x)$ fraction rationnelle en x.
3) Exhiber une relation entre $f(x+\pi)$ et $f(x)$.

□ **Exercice 44** Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$, f non identiquement nulle sur $\mathbf{R}$, et telle que :

$$f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Pour $n \geqslant 0$ on pose $f_n : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $f_n : x \mapsto f(nx)$.
Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n), puis sa convergence uniforme sur $\mathbf{R}_+$ et finalement sa convergence uniforme sur $[\alpha,+\infty[$ où $\alpha > 0$.

□ **Exercice 45** On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ où $f_n : x \mapsto (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n^2+x^2}$.

1) Étudier la convergence simple. On note f sa somme lorsqu'elle existe.
2) Montrer que la fonction f ainsi définie est continue, puis $\mathscr{C}^\infty$.

□ **Exercice 46** On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{n}{n+n^2x}$

1) Étudier la convergence simple. On note f sa somme lorsqu'elle existe.
2) La fonction f est-elle continue .
3) Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

□ **Exercice 47** On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n}\arctan\left(\frac{x}{n}\right)$.
On note f sa somme.

1) Étudier l'ensemble de définition et la continuité de f.
2) Étudier les variations de f et sa concavité.
3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$
5) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ et déterminer un équivalent de $f'(x)$ au voisinage de $+\infty$.
6) En déduire un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
7) Donner l'allure du graphe de f

□ **Exercice 48** On pose : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-x)^n}{n^2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^n$.

1) Donner le domaine de définition de f.
2) Étudier la dérivabilité de f. Calculer $f'(x)$, puis $f(x)$.

□ **Exercice 49**

1) Justifier la définition et la continuité sur $\mathbf{R}$ de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} f_n(x)$ où $f_n : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$.
2) A l'aide du théorème de la double limite, montrer que $f(x) \underset{0}{\sim} x\ln 2$.
3) Etablir : $\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}(f_n(x) - f_{n+1}(x))$.
   En déduire que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \dfrac{\pi}{4}$
   On pourra utiliser, pour x fixé, la convexité de la fonction $t \mapsto \arctan \frac{x}{t}$.

□ **Exercice 50** On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ où $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}}$.
On note f sa somme.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f. Étudier la continuité, la classe $\mathscr{C}^1$ de f.
2) Déterminer les limites de f en 0^+ et $+\infty$.
3) Déterminer un équivalent de f en 0^+.
4) On veut déterminer un équivalent de f en $+\infty$. On propose deux méthodes
   a) Montrer qu'il existe une constante K telle que pour pour $x > 0$
   $$f(x) = K\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})}\,\mathrm{d}t$$
   Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ de l'intégrale du terme de droite et conclure.
   b) Soit $x > 0$, calculer $f(x) + f(x+1)$ et retrouver l'équivalent trouvé ci-dessus.

□ **Exercice 51** Soit (u_n) une suite réelle strictement décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.

1) Justifier l'existence de $\sigma_p = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^p$, pour $p \in \mathbf{N}^*$.
2) Montrer que la suite $\left(\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}\right)$ converge et donner sa limite.

□ **Exercice 52**

1) Déterminer l'ensemble de définition I de $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$.
2) Montrer que la fonction f est continue sur I.
3) Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur deux intervalles qu'on précisera.
4) Déterminer un équivalent de f en 0. Tracer le graphe de f.

□ Exercice 53

1) Justifier la définition et la continuité sur $\mathbf{R}_+^*$ de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.
2) Trouver un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.
3) Etablir : $\forall x \in \mathbf{R}_+^* \quad f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x}\right)$.

   En déduire : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.
4) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+*} \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}\,.$$

   Retrouver ainsi les équivalents précédents.

□ Exercice 54

1) Préciser l'ensemble de définition des fonctions ζ et η définies par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad \text{et} \quad \eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\,.$$

2) Pour $x > 1$, établir une relation entre $\zeta(x)$ et $\eta(x)$; quelles sont les limites de ζ et η en $+\infty$?
3) Montrer que η est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$; à l'aide de $\eta(1)$ et de $\eta'(1)$, déterminer a et b réels tels que

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1) \quad \text{au } \mathscr{V}(1^+).$$

□ Exercice 55 Démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^n}{1-t^n} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{\pi^2}{6(1-t)^2}$

□ Exercice 56 On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$ pour tout x de $]-1,1[$.

1) Montrer que f est continue sur $]-1,1[$.
2) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (1-x)f(x)$.

□ Exercice 57 Soit a un réel.

1) Soit $x \in [-\pi,\pi]$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2+a^2}$.

   On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2+a^2}$.
2) Justifier qu'il existe une fonction F de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-\pi,\pi]$ telle que $F'' = f$. On exprimera F sous forme d'une série.
3) Exprimer F en fonction de f.

   On pourra utiliser que : $t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\cos(nt)}{n^2}$ pour $t \in [-\pi,\pi]$.
4) En déduire f sur $[-\pi,\pi]$.

□ Exercice 58

1) Soit z un nombre complexe tel que $|z| < 1$. Exprimer $\frac{1}{1-z}$ comme somme d'une série.
2) En déduire une expression de $\frac{1}{1-2e^{i\theta}}$.
3) En déduire une suite (a_n) telle que

$$\forall \theta \in \mathbf{R}, \quad \frac{1-2\cos\theta}{5-4\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

CHAPITRE 6

Familles sommables & Dénombrabilité

□ **Exercice 1** Rayon de convergence et somme : $\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

□ **Exercice 2**

1) Soit $z \in \mathbf{C}$. Montrer que la famille $\left(\dfrac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right)_{(p,q)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}^*}$ est sommable si et seulement si $|z|<1$.

2) Montrer que sa somme vaut $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-z^2}$ si $|z|<1$.

□ **Exercice 3** Soit z est un complexe de module strictement inférieur à 1.
Étudier la sommabilité de la famille$\left(z^{pq}\right)_{(p,q)\in(\mathbf{N}^*)^2}$.

□ **Exercice 4**

1) Pour $q \in \mathbf{N}^*$ fixé, montrer que la série $\sum_{p\geqslant 1, p\neq q}\frac{1}{p^2-q^2}$ converge et calculer sa somme.

2) Pour $(p,q)\in(\mathbf{N}\setminus\{0\})^2$, on pose $u_{pq}=\frac{1}{p^2-q^2}$ si $p\neq q$ et $u_{pq}=0$ si $p=q$. Montrer que :

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty}u_{pq}\right)=-\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=1}^{+\infty}u_{pq}\right)\neq 0$$

Qu'en conclure ?

□ **Exercice 5** Montrer que pour tout complexe z tel que $|z|<1$ et tous entiers $a,b,c\in\mathbf{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{nc}}{1-z^{na+b}}$$

□ **Exercice 6** En envisageant la suite double $\left(\frac{z^n}{p^n}\right)_{n\geqslant 2,p\geqslant 2}$, pour un complexe z tel que $|z|<2$, montrer que :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\zeta(n)-1\right)=1 \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\left(\zeta(n)-1\right)=\frac{1}{2}$$

où ζ est la fonction ζ de Riemann : $\forall x>1\ ,\ \zeta(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^x}$.

□ **Exercice 7**

1) Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{\substack{(p,q)\in(\mathbf{N}^*)^2\\ p\wedge q=1}}$ est sommable :
2) Calculer sa somme

On rapelle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, *et* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

On pourra calculer $\sum\limits_{\substack{(p,q)\in(\mathbf{N}^*)^2\\ p\wedge q=d}}\frac{1}{p^2q^2}$ *en fonction de* $\sum\limits_{\substack{(p,q)\in(\mathbf{N}^*)^2\\ p\wedge q=1}}\frac{1}{p^2q^2}$

□ **Exercice 8** Montrer que la famille $\left(2^{-3q-p-(p+q)^2}\right)_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable puis calculer sa somme.

□ **Exercice 9** Montrer que la famille $\left(\dfrac{p!q!}{(p+q+2)!}\right)_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable puis calculer sa somme.

□ **Exercice 10** Soit $\alpha\in\mathbf{R}$.

1) Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(i+j)^\alpha}\right)_{(i,j)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $\alpha>2$.
2) Soit $p\in\mathbf{N}^*$. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(i_1+\ldots+i_p)^\alpha}\right)_{(i_1,\ldots,i_p)\in(\mathbf{N}^*)^p}$ est sommable si et seulement si $\alpha>p$.
3) Que peut-on dire de la famille $\left(\dfrac{1}{\sqrt{i_1^2+\ldots+i_p^2}^{\,\alpha}}\right)_{(i_1,\ldots,i_p)\in(\mathbf{N}^*)^p}$?

□ **Exercice 11** Soit $(a_{p,n})_{(p,n)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ une famille de réels positifs. On suppose que pour tout $p\in\mathbf{N}^*$, la suite $(a_{p,n})_{n\geqslant1}$ est croissante et converge vers un réel α_p. On suppose de plus que la série $\sum\alpha_p$ converge.

1) Montrer que la suite $(a_{1,n}+a_{2,n}+\ldots+a_{n-1,n})_{n\geqslant1}$ converge et donner sa limite en fonction des α_p.
On pourra considérer la famille $(b_{p,n})_{(p,n)\in(\mathbf{N}^*)^2}$ *où* $b_{p,n}=a_{p,n}-a_{p,n-1}$.
2) Calculer $\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^n+\left(\frac{2}{n}\right)^n+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right]$
On pourra lire la somme de droite à gauche.

□ **Exercice 12** Soit α un réel strictement positif. Étudier la sommabilité de la famille $\left(e^{-(p^\alpha+q^\alpha)}\right)_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$.

□ **Exercice 13** Soit α un réel strictement positif.
Étudier la sommabilité de la famille $\left(e^{-\ln^\alpha(p^2+q^2)}\right)_{(p,q)\in(\mathbf{N}^*)^2}$

□ **Exercice 14** Soient a et b deux réels strictement positifs. Étudier la sommabilité de la famille de terme général $u_{pq}=\frac{1}{a^p+b^q}$, $(p,q)\in\mathbf{N}^2$. On discutera selon les valeurs de a et$b$.

□ **Exercice 15** Soit G un sous-groupe strict de $(\mathbf{R},+)$. Montrer que $\mathbf{R}\setminus G$ n'est pas dénombrable.

□ **Exercice 16** Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de boules ouvertes deux à deux disjointes de E. Montrer que I est au plus dénombrable.

□ **Exercice 17**

1) Montrer que $\mathbf{Q}[X]$ est dénombrable.
2) Soit $\alpha\in\mathbf{C}$. On dit que α est algébrique s'il existe un polynôme à coefficients entiers P non nul tel que $P(\alpha)=0$. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est au plus dénombrable.

□ **Exercice 18** Soit $(G,*)$ un groupe. On suppose que G a une partie génératrice au plus dénombrable. Montrer que G est au plus dénombrable.

CHAPITRE 7

Probabilités I

1 Applications du cours

A Probabilités sans moments

□ **Exercice 1** Une grenouille monte un escalier de n marches. Elle peut progresser en sautant d'une marche à la suivante ou en sautant par dessus une marche. On note u_n le nombre de façons qu'a la grenouille d'atteindre le haut de l'escalier.

1) Déterminer u_1, u_2, u_3.
2) Déterminer une relation entre u_{n+1}, u_n et u_{n-1}. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3) À l'aide d'une autre méthode, exprimer u_n sous forme d'une somme.

□ **Exercice 2** Un laboratoire fabrique des alcootest et les essais montrent que :

— 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété
— 95 fois sur 100, l'alcootest a donné un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété
— 95 fois sur 100, l'alcootest a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété

1) On essaie l'appareil sur une personne, et on constate un résultat positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
2) On essaie l'appareil sur une personne, et on constate un résultat négatif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?
3) Déterminer la probabilité que le résultat indiqué par la machine soit faux.

□ **Exercice 3** Soit $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m, p)$, deux v.a.r indépendantes. Soit k un entier compris entre 0 et $n+m$.
Déterminer la loi de X conditionnée par $(X+Y=k)$.

□ **Exercice 4** Lors de la Journée Portes Ouvertes du lycée, le nombre de visiteurs pour l'option Maths Sup suit une loi de Poisson de paramètre λ. Trois conférenciers A,B,C proposent une présentation, et chaque visiteur assiste indifféremment à l'une ou l'autre.

1) Quelle est la loi conditionnelle du nombre de spectateurs dans la salle A, sachant que le nombre de visiteurs est k ?

2) Quelle est la loi du nombre de spectateurs dans la salle A ?

□ **Exercice 5** Soit X une variable aléatoire discrète réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Pour tout λ réel, on pose $\mathbf{P}(\lambda) = \lambda^2 + 2X\lambda - X$.
Soit Y le nombre aléatoire de racines réelles de P. Montrer que Y est une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, et déterminer sa loi en fonction de celle de X.

□ **Exercice 6** Soit X une variable aléatoire discrète réelle réelle définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, telle que $X(\Omega) \subset \mathbf{N}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose alors $U = \mathbf{1}_{(X \leqslant n)}$ et $T = XU$.

1) Montrer que T est une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
2) Déterminer la loi de T si X suit une loi géométrique de paramètre p.

□ **Exercice 7** Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à obtenir la dernière boule blanche.
On note X le nombre de tirages effectués. Déterminer la loi de X.

□ **Exercice 8** Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que $\mathbf{P}(X \geqslant n) > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
On appelle *taux de panne* de X la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ des probabilités conditionnelles définies par :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}, x_n = \mathbf{P}_{(X \geq n)}\big(X = n\big).$$

1) a) Vérifier que $\mathbf{P}(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbf{N}^*$.
   b) Déterminer le taux de panne de la variable aléatoire Y.
2) Dans le cas général, montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}(X \geqslant n) = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - x_k) = (1 - x_1)\dots(1 - x_{n-1})$$

   puis exprimer $p_n = \mathbf{P}(X = n)$ en fonction des x_k.
3) Déterminer les lois de variables à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ ayant un taux de panne constant.

□ **Exercice 9** Soit n un entier $\geqslant 1$. Une urne contient n boules blanches et une boule rose. On effectue une succession de tirages d'une boule à chaque fois. Si on tire la boule rose, on la remet dans l'urne avant le tirage suivant ; si on tire une boule blanche, on ne la remet pas dans l'urne. Soit X le nombre de tirages juste nécessaires pour qu'il n'y ait plus aucune boule blanche dans l'urne.
L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}\big)$.

1) Calculer $\mathbf{P}(X = n)$.
2) Calculer $\mathbf{P}(X = n + 1)$, puis en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.
3) Calculer $\mathbf{P}(X = n + 2)$, puis en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.

□ **Exercice 10** Soit $p \in]0, 1[$. $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ définies sur un espace probablisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $E_\omega = \{n \in \mathbf{N}^*\ ,\ X_n(\omega) = 1\}$.
On note $T : \Omega \to \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega, T(\omega) = \begin{cases} +\infty \text{ si } \mathrm{Card}(E_\omega) \leqslant 1 \\ \text{deuxième plus petit élément de } E_\omega \text{ sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de T.

□ **Exercice 11** Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 2. L'entier p restera fixé dans tout l'exercice. On considère np variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_{np}$. On suppose que la variable aléatoire X_k suit une loi de Poisson de paramètre λ_1 (respectivement : λ_2) pour tout k appartenant à $[\![1, p]\!]$ (respectivement : $[\![p+1, np]\!]$). On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{np} X_i, \quad A = \sum_{i=1}^{p} X_i, \quad B_n = \sum_{i=p+1}^{np} X_i$$

1) Déterminer les lois des variables aléatoires A et B_n.
2) Quelle est la loi de S_n ?
3) Soit $\ell \in \mathbf{N}$.
   a) On considère une variable aléatoire Y_ℓ dont la loi est donnée par :
   $$\mathbf{P}(Y_\ell = m) = P_{(S_n = \ell)}(A = m) \text{ pour tout } m \in \mathbf{N}.$$
   Déterminer explicitement cette loi.
   b) De même on considère une variable aléatoire Z_ℓ dont la loi est donnée par :
   $$\mathbf{P}(Z_\ell = m) = P_{(S_n = \ell)}(B_n = m) \text{ pour tout } m \in \mathbf{N}.$$
   Déterminer explicitement cette loi.

□ **Exercice 12** Un boulanger mélange 1000 raisins dans de la pâte pour fabriquer 100 brioches de même masse.

1) Quelle est la loi exacte du nombre X de raisins contenus dans une brioche achetée chez ce boulanger ? Précisez quelles hypothèses vous faites.
2) En utilisant une approximation classique de la loi de X, évaluer la probabilité que la brioche achetée contienne 10 raisins à deux unités près (i.e. $8 \leqslant X \leqslant 12$)

B Probabilités finies

□ **Exercice 13** On ordonne au hasard n jetons numérotés de 1 à n et on dit qu'il y a coïncidence si le jeton numero k se trouve à la k-ième place. On note S le nombre total de coïncidences.
Afin d'étudier S, on introduit pour i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, la variable X_i égale à 1 s'il y a coïncidence au $i$ème rang et 0 sinon.

1) Reconnaître la loi de X_i.
2) Déterminer pour i et j distincts, la loi conjointe de (X_i, X_j).
3) En déduire l'espérance et la variance de S.

□ **Exercice 14** Un sac contient n billes numérotées de 1 à n. On tire une bille au hasard, on note son numéro et on la remet dans le sac.
On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur ce numéro. Lorsque ce numéro est k, on tire sans remise k billes que l'on distribue au hasard dans p boîtes $B_1, \dots, B_p$. On désigne par Y_i la variable aléatoire égale au nombre de billes reçues par la boîte B_i ($i \in \{1, \dots, p\}$).

1) Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. Déterminer la loi conditionnelle de Y_i sachant $(X = k)$ pour $i \in \{1, \dots, p\}$.
2) Déterminer l'espérance de Y_i.
3) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\frac{Y_i}{X}$.

□ **Exercice 15** Une urne contient N boules numérotées de 1 à N, les boules numérotées de 1 à M sont rouges et les autres blanches ($N \geqslant 2$).

1) On tire successivement et sans remise n boules de l'urne ($1 \leqslant n \leqslant N$). Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Calculer le nombre d'éléments de Ω, noté card(Ω).
2) Désormais, on suppose que les résultats possibles sont équiprobables. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on introduit les événements
A_k = "la k^{ieme} boule tirée est rouge"
   a) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(A_k)$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   b) Calculer, pour $k \neq \ell$ ($1 \leqslant k, \ell \leqslant n$), la probabilité $\mathbf{P}(A_k \cap A_\ell)$.
3) On introduit les variables aléatoires Z_k, $(1 \leqslant k \leqslant n)$, dé finies par $Z_k = 1$ si la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge, $Z_k = 0$ sinon.
On pose $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$. On note p le rapport $\frac{M}{N}$.
   a) Calculer la variance $V(S_n)$ en fonction de n, N et p.
   b) Calculer la limite de $V(S_n)$, pour n fixé, quand M et N tendent vers l'infini de telle sorte que p tende vers un réel p_0 tel que $0 < p_0 < 1$.

□ **Exercice 16** Une urne contient initialement n boules numérotées depuis 1 jusqu'à n, avec $n \geqslant 2$. On vide l'urne en extrayant toutes les boules une à une, au hasard et sans remise.

1) Pour i compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule obtenue au $i^{\text{ème}}$ tirage porte le numéro i et 0 dans le cas contraire. Quelle est la loi de X_i ?
2) En déduire l'espérance du nombre de fois où il y a coïncidence entre le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue, lorsque l'on vide l'urne.
3) Pour k compris entre 1 et n, on dit que le résultat du k^{eme} tirage est un `record` si la boule obtenue à ce tirage porte un numéro strictement supérieur à tous les numéros obtenus jusqu'alors. (par convention, le résultat du premier tirage sera toujours considéré comme un `record`).
   a) Combien existe-t-il de façons de vider l'urne et pour lesquelles il n'y a qu'un seul `record` ? Pour lesquelles il y a n records ?
   b) Montrer que pour p et q entiers naturels, on a la relation suivante :

$$\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{p+q}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$$

4) Soit k fixé entre 2 et n et j fixé entre k et n. Combien existe-t-il de façons de vider l'urne, pour lesquelles la $k^{\text{ème}}$ boule obtenue porte le numéro j et le $k^{\text{ème}}$ tirage constitue un `record` ?
5) Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles le $k^{\text{ème}}$ tirage est un `record` ? En déduire la probabilité que le $k^{\text{ème}}$ tirage soit un `record`. Pouvait-on avoir ce résultat directement ?
6) Pour k compris entre 1 et n, soit Y_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat du $k^{\text{ème}}$ tirage est un `record` et 0 sinon. Déterminer la loi de Y_k. Soit R le nombre aléatoire de records obtenus lorsque l'on vide l'urne. Déterminer l'espérance de R.

□ **Exercice 17** Une boîte contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire un jeton au hasard, on note son numéro et on le remet dans la boîte. Si le numéro de ce jeton est i, alors on tire au hasard et sans remise i jetons de la boîte que l'on distribue au hasard dans trois urnes U_1, U_2 et U_3 (vides au départ). Pour tout k de $[\![\, 1\,;\, 3 \,]\!]$, on note X_k la variable aléatoire désignant le nombre de jetons de l'urne U_k après cette opération.

1. Soit X la variable aléatoire donnant le numéro du jeton que l'on a tiré au départ dans la boîte. Quelle est la loi de X ? Déterminer la loi conjointe du couple (X_k, X), où $k \in [\![1 ; 3]\!]$.
2. Calculer pour tout $k \in [\![1 ; 3]\!]$, l'espérance de X_k.
3.a) Trouver la loi du vecteur aléatoire (X_1, X_2, X).
b) En déduire la loi du vecteur aléatoire (X_1, X_2, X_3).
4. On définit pour tout $k \in [\![1 ; 3]\!]$, la variable aléatoire Y_k par : $Y_k = \dfrac{X_k}{X}$.
Calculer les espérances des variables aléatoires Y_k et $(Y_k)^2$. Donner un équivalent de la variance de Y_k, lorsque n tend vers l'infini.

□ **Exercice 18** On retourne une à une les cartes d'un jeu ordinaire (32 cartes). Quel est le nombre moyen de cartes qu'il faut retourner pour voir le premier as ?

□ **Exercice 19** Dans une file d'attente de n personnes, résultant de la distribution au hasard de ces personnes, se trouvent deux amis Jean et Paul. Quelle est la probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes ? Quel est le nombre de personnes le plus probable qui séparent Jean et Paul ? Quel est le nombre moyen de personnes qui séparent Jean et Paul ?

2 Exercices plus élaborés

A Probabilités sans moments

□ **Exercice 20** Pour n et p deux entiers non nuls, on pose $E = \{1, \cdots, n\}$ et $F = \{1, \cdots, p\}$. On note S_n^p le nombre de surjections de E dans F.

1) Calculer S_n^p pour $p > n \geqslant 1$.
2) Calculer S_1^1, S_2^1 , puis pour tout $n \geqslant 1$, S_n^1.
3) Calculer S_2^2, S_3^2 , puis pour tout $n \geqslant 2$, S_n^2.
4) Calculer pour tout $n \geqslant 1$, S_n^n et S_{n+1}^n.
5) On suppose $n > p \geqslant 1$.
En considérant la restriction à $\{1, \cdots, n-1\}$ d'une surjection de E dans F, montrer la relation :
$$S_n^p = p\left(S_{n-1}^p + S_{n-1}^{p-1}\right)$$

□ **Exercice 21**

1) Soit $(p, q, r) \in \mathbf{N}^3$, montrer que $\sum\limits_{\substack{i,j \geqslant 0 \\ i+j=r}} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \binom{p+q}{r}$.
C'est la formule de Vandermonde.
2) On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Déterminer $\mathbf{P}(X = Y)$.
3) Que pensez vous de l'affirmation suivante : « Si on lance un grand nombre (pair) de fois une pièce équilibrée, il y a une forte probabilité d'obtenir exactement autant de piles que de faces » ? Déterminer un équivalent de cette probabilité.

□ **Exercice 22** Soit $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$. Soit $\sigma \in \mathscr{E}_n$, i est un point fixe de σ si $\sigma(i) = i$.
Une permutation sans point fixe est appelée dérangement de $\mathscr{E}_n$.

1) Soit $B_1, \ldots, B_n$ des parties d'un ensemble fini E. Montrer que :
$$\mathrm{Card}(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \mathrm{Card}(B_{i_1} \cap \ldots \cap B_{i_p}).$$
On pourra considérer la fonction caractéristique du complémentaire de $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ dans E.

2) Soit A_i l'ensemble des permutations laissant fixe i, et D_n l'ensemble des dérangements. Exprimer D_n en fonctions des ensembles A_i et calculer alors $d_n = \text{Card}(D_n)$ à l'aide de la formule ci-dessus.
3) Plus généralement,on note F_n^p l'ensemble des permutations ayant exactement p points fixes $(0 \leqslant p \leqslant n)$.
Exprimer $f_n^p = \#F_n^p$ en fonction de d_{n-p}, et en déduire que
$$f_n^p = \frac{n!}{p!}\sum_{k=0}^{n-p}\frac{(-1)^k}{k!}$$
4) On permute au hasard les entiers de $[\![1,n]\!]$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points fixes de cette permutation. Déterminer la loi de X.

□ **Exercice 23** Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Une urne contient n boules rouges et m boules bleues. Les boules rouges sont numérotées de 1 à n. Les boules sont tirées (sans remise) au hasard et une à une de l'urne jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée. On note alors les numéros des boules rouges qui ont été tirées. Soit X le plus grand de ces numéros et Y le plus petit. Si la première boule tirée est bleue, on pose $X = Y = 0$. On note également T le nombre de boules rouges tirées. L'expérience est modélisée à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

1) Soient A, B, C trois événements. Montrer que
$$\mathbf{P}(\overline{A}\cap B\cap C) = \mathbf{P}(\overline{A}) - \mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) - \mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{C}) + \mathbf{P}(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$$
2) Étude de T.
   a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T.
   b) Calculer $\mathbf{P}(T = 0), \mathbf{P}(T = 1)$.
   c) Soit $k \in [\![2,n]\!]$. Calculer $\mathbf{P}(T = k)$.
3) Soit R une partie de l'ensemble des boules rouges de cardinal r. Montrer que la probabilité q_r qu'aucune boule rouge de R n'ait été tirée au cours du jeu vaut $\frac{m}{m+r}$.
4) Soient $(i, j) \in [\![0,n]$ On cherche à déterminer $p_{i,j} = \mathbf{P}[(X = i)\cap(Y = j)]$.
   a) Calculer $p_{0,0}$.
   b) On suppose que $i = j \neq 0$. Montrer que $p_{i,j} = \frac{m}{(n+m)(n+m-1)}$.
   c) On suppose que $i > j > 0$. On note $t = i - j$. Montrer que :
$$p_{i,j} = \frac{2m}{(n+m-t-1)(n+m-t)(n+m-t+1)}$$

□ **Exercice 24**

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, on a $1 - x \leqslant e^{-x}$. item Soit $\ell \in \mathbf{N}^*$ et $E_1, E_2, \ldots, E_\ell$ une famille de ℓ événements indépendants. Montrer que l'on a
$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{1\leq i\leq \ell}\overline{E_i}\Big) \leqslant e^{-\sum\limits_{i=1}^{\ell}\mathbf{P}(E_i)}$$
2) On dispose d'une urne vide au départ. Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne. Ensuite, à chaque nouvelle journée, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré, elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment. On note A_k l'événement « la boule numérotée 10 sort lors du $k^{ème}$ tirage ».

a) Déterminer $\mathbf{P}(A_k)$.

b) Pour tout $n \geqslant 10$, on note B_n l'événement « la boule 10 sort au moins une fois à partir du $n^{ème}$ tirage ». Exprimer B_n en fonction des événements A_k et déterminer $\mathbf{P}(B_n)$.

c) On note C l'événement « la boule 10 sort un infinité de fois ». Exprimer C en fonction des événements précédents et déterminer $\mathbf{P}(C)$.

d) Calculer la probabilité que le 10 sorte une infinité de fois de suite.

3) On suppose cette fois que la personne remplit l'urne de sorte qu'il y ait dans l'urne n^2 boules, numérotées de 1 à n^2, le $n^{ème}$ jour (elle met donc une boule numérotée 1 le premier jour, trois boules numérotées $2, 3, 4$ le deuxième jour, cinq boules le troisième, ...). Comme à la question précédente, elle tire alors une boule, note son numéro et la remet immédiatement dans l'urne. Quelle est la probabilité que le nombre 10 sorte une infinité de fois ?

□ **Exercice 25** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$.
On pose $q = 1 - p$ et on note α un réel strictement positif et différent de 1.
L'objet de cet exercice est de calculer la probabilité que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha X_n}$ soit convergente, c'est-à-dire de calculer la probabilité de l'événement :

$$A = \left\{\omega \in \Omega \ ; \ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge}\right\}$$

1) Calculer la probabilité de A lorsque $\alpha > 1$.
On suppose désormais que $\alpha \in \,]0, 1[$; on pose $\beta = 1 - \alpha$.

2) a) Montrer que pour tout k de $\mathbf{N}$, on a :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty}(X_n \geqslant n^\beta)\Big) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} q^{n^\beta - 1}$$

b) Étudier la convergence de la série de terme général $q^{n^\beta - 1}$.

c) En déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{P}\Big(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}(X_n \geqslant n^\beta)\Big)$.

d) En déduire que $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}(X_n \geqslant n^\beta)\Big)\Big) = 0$.

Dans la suite de l'exercice, on note :

$$A_\beta = \left\{\omega \in \Omega \ ; \ X_n(\omega) \geqslant n^\beta \text{ pour un nombre fini de valeurs de } n \text{ uniquement}\right\}$$

3) a) Montrer que $A_\beta = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Big(\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}(X_n < n^\beta)\Big)$.

b) Montrer que $\mathbf{P}(A_\beta) = 1$.

4) a) Montrer que pour tout $\omega \in A_\beta$, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ est divergente.

b) En déduire la probabilité de l'événement A.

□ **Exercice 26** Soit $n \geqslant 2$.

Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ définie par $J[p,q] = \begin{cases} 1 & \text{si } q - p = 1 \\ 1 & \text{si } p = n, q = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1) Déterminer les valeurs propres de J, en exhibant pour chacune un vecteur propre (réel ou complexe) associé.
En déduire que la matrice J est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.

2) On note $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ les n points du plan, d'affixes respectives $z_k = e^{2ik\pi/n}$, pour $k \in [\![0 ; n-1]\!]$. Une puce se trouve au temps $t = 0$ en A_0.

   — si à l'instant t, elle se trouve en A_k, pour $k \in [\![1 ; n-2]\!]$, elle se trouvera à l'instant $t+1$, soit en A_{k-1} soit en A_{k+1}, ceci avec équiprobabilité.

   — si à l'instant t, elle se trouve en A_0, elle se trouvera à l'instant $t+1$, soit en A_{n-1} soit en A_1, ceci avec équiprobabilité.

   — si à l'instant t, elle se trouve en A_{n-1}, elle se trouvera à l'instant $t+1$, soit en A_{n-2} soit en A_0, ceci avec équiprobabilité.

   Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on note X_m la variable aléatoire à valeurs dans $[\![0 ; n-1]\!]$ telle que pour tout $k \in [\![0 ; n-1]\!]$, $(X_m = k)$ est l'événement « la puce est en A_k à l'instant m ».
   On pose alors $U_m = (\mathbf{P}(X_m = 0) \;\; \mathbf{P}(X_m = 1) \;\; \cdots \;\; \mathbf{P}(X_m = n-1))^\top \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

   a) Déterminer U_0

   b) Déterminer une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que pour tout $m \in \mathbf{N}$, $U_{m+1} = AU_m$.

   c) Exprimer A à l'aide de puissances de la matrice J.

   d) En déduire les valeurs propres de la matrice A. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

   e) On suppose que n est impair et supérieur à 3. Déterminer un vecteur propre associé à la valeur propre de module maximal puis en déduire la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(X_m)_{m\in\mathbf{N}}$, c'est à dire : déterminer, pour tout k dans $[\![0 ; n-1]\!]$, $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathbf{P}(X_m = k)$.

□ **Exercice 27** Soit n un entier de $\mathbf{N}^*$.

1) On note F_n l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ qu'on munit de la loi uniforme. On choisit au hasard une de ces permutations, et on définit la variable aléatoire Y_n égale au nombre de points fixes de cette permutation.

   a) Montrer que le nombre d'éléments de F_n n'admettant aucun point fixe vaut :

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

   b) Déterminer la loi de Y_n.

   c) Soit $k \in \mathbf{N}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(Y_n = k)$.

2) On note E_n l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. On choisit au hasard une de ces applications, et on définit la variable X_n égale au nombre de points fixes de cette application.

   a) Déterminer la loi de X_n.

   b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k)$.

□ **Exercice 28** On considère un tournoi de n participants ($n \geqslant 2$) où le vainqueur est le joueur qui a obtenu le plus de points. On note X_i la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ qui est égale au nombre de points obtenus par le joueur i à l'issue du jeu.
On suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées. On notera F de fonction de répartition :

$$\forall k \in \mathbf{N}, F(k) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant k)$$

On note V_n l'événement : « il existe un unique vainqueur ».

1) Écrire V_n comme la réunion de n événements disjoints.

2) En déduire que $\mathbf{P}(V_n) = n \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_1 = k) F(k-1)^{n-1}$.

3) On suppose que X_1 ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(V_n) = 0$.
Commenter le résultat.

4) On suppose que X_1 suit la loi uniforme sur l'ensemble d'entiers $\{0, \ldots, m\}$ ($m \in \mathbf{N}$).

   a) Donner alors l'expression de $\mathbf{P}(V_n)$.

   b) À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que quand m tend vers l'infini, on a : $\sum_{k=0}^{m} k^{n-1} \sim \frac{m^n}{n}$.

   c) En déduire $\lim_{m\to+\infty} \mathbf{P}(V_n)$. Commenter le résultat.

B Probabilités finies

□ **Exercice 29** Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telles que $X(\Omega) = [\![1\,;n+1]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1\,;n+1]\!]$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n+1]\!]^2$, on pose

$$a_{i,j} = \mathbf{P}((X=j) \cap (Y=i)) \text{ et } b_{i,j} = \mathbf{P}_{(X=j)}(Y=i)$$

1) Dans cette première partie, on suppose qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n+1]\!]^2,\, a_{i,j} = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$$

   a) Calculer la valeur de λ.

   b) Déterminer les lois marginales de X et de Y.

   c) Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

   d) Soit $Z = X - 1$. Reconnaître dans la loi de Z une loi usuelle. En déduire l'espérance et la variance de X.

2) Dans cette question, on reprend les valeurs des $a_{i,j}$ définies ci-dessus. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est $b_{i,j}$.

   a) Calculer la dimension de l'image et celle du noyau de B.

   b) Calculer B^p, pour tout entier $p \in \mathbf{N}^*$.

   c) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de B. La matrice B est-elle diagonalisable ?

3) On suppose à présent que :

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n+1]\!]^2,\, a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } |i+j-n-2| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   a) Déterminer α.

   b) Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

   c) On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ la matrice dont le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est $b_{i,j}$. Écrire B dans le cas particulier $n = 4$.

□ **Exercice 30** Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
On définit la fonction φ_X sur $\mathbf{R}^*$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R}^*, \varphi_X(t) = \frac{1}{t}\ln(\mathbf{E}(e^{tX}))$$

où E désigne l'opérateur espérance.

1) Montrer que φ_X est ainsi bien définie sur $\mathbf{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0, en posant $\varphi_X(0) = \mathbf{E}(X)$.
   On note encore φ_X la fonction ainsi prolongée.
2) Démontrer que φ_X est dérivable en 0 et calculer $\varphi_X'(0)$ à l'aide de la variance de X.
3) a) Montrer que pour tout $u \leqslant 0$, on a : $e^u \leqslant 1 + u + \frac{1}{2}u^2$.
   b) Montrer que si X ne prend que des valeurs négatives ou nulles, on a :
   $$\forall t \geqslant 0, \varphi_X(t) \leqslant \mathbf{E}(X) + \frac{t}{2}\mathbf{E}(X^2)$$
4) a) Pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, on note f_i la fonction $t \mapsto e^{tx_i}$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.
   b) En déduire que deux variables discrètes finies X et Y ont la même loi si et seulement si les fonctions φ_X et φ_Y sont égales.
5) Montrer que si X et Y sont des variables discrètes finies indépendantes, alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$.
6) Montrer que φ_X est impaire si et seulement si X est une variable symétrique, c'est-à-dire telle que X et $-X$ ont la même loi.

□ **Exercice 31** Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $E = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.
Soit Z et T les variables aléatoires définies par :

$$Z = |X - Y| \text{ et } T = \inf(X, Y)$$

1) a) Justifier l'existence des moments de tous ordres de Z et T.
   b) Montrer que $\mathbf{E}(Z) = \frac{n(n+2)}{3(n+1)}$.
   c) En déduire $\mathbf{E}(T)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.
2) Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, telle qu'il existe $K \in \mathbf{N}^*$ vérifiant : $0 \leq U \leq K$.
   a) Calculer $\sum\limits_{j=1}^{K} j^2\mathbf{P}(U \geqslant j)$ en fonction de $\mathbf{E}(U)$, $\mathbf{E}(U^2)$ et $\mathbf{E}(U^3)$.
3) a) Calculer pour tout $j \in \mathbf{N}$, la probabilité $\mathbf{P}(T \geqslant j)$.
   b) Retrouver la valeur de $\mathbf{E}(T)$.
4) Calculer $\mathbf{E}(Z^2)$ en fonction de la variance σ_X^2 de la variable aléatoire X.

□ **Exercice 32**

1) Démontrer que deux variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.
2) Soit n un entier tel que $2 \leq n$. Une urne contient des boules rouges et des blanches en proportions respectives r et b, avec $0 < r < 1$ et $b = 1 - r$.
   Un joueur effectue n tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise de la boule obtenue à chaque étape du tirage.
   Pour $k \geqslant 2$, le joueur gagne 1 point au $k^{\text{ème}}$ tirage si la couleur de la boule obtenue à ce tirage n'est pas celle qui a été obtenue au tirage précédent. Sinon, son gain à ce rang du tirage est nul.
   Soit G la variable aléatoire égale au nombre de points gagnés par le joueur au cours des n tirages.

3) a) Pour $k \in [\![2\,; n]\!]$, on définit la variable aléatoire X_k égale au gain du joueur pour le tirage de rang k.
Préciser la loi de X_k et calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X_k, X_{k+1})$, pour $k \in [\![2\,; n-1]\!]$.

b) Calculer l'espérance et la variance de G.

c) Peut-on choisir b pour que G suive une loi binomiale ?

4) On reprend le jeu précédent et on définit la variable aléatoire T_n par :
si $G \geqslant 1$, T_n est égal au rang du tirage amenant le premier point et sinon, T_n vaut $n+1$.

a) Déterminer la loi de T_n.

b) Dans cette question, $r = b = \frac{1}{2}$.
Comparer la loi de $T_n - 1$ avec la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
En déduire une estimation de $\mathbf{E}(T_n)$ quand n est grand.

□ **Exercice 33** Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et k un entier tel que $2 \le k \le n$. Une urne contient n boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à n. Un joueur tire en une seule fois k boules de l'urne. On désigne par X_1 et X_k les variables aléatoires égales respectivement au plus petit et au plus grand numéro tiré.

1) Dans cette question, $k = 2$.

a) Déterminer la loi de X_1 et calculer son espérance.

b) Déterminer la loi de X_2, comparer X_1 et $n+1-X_2$, puis calculer $\mathbf{E}(X_2)$.

2) On revient au cas général : $2 \le k \le n$.

a) Déterminer la loi de X_1.

b) Le joueur note les numéros des boules sorties et range ces nombres dans l'ordre croissant : $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Pour j appartenant à $[\![1\,; k]\!]$, soit X_j la variable aléatoire égale au $j^{ème}$ numéro obtenu dans l'ordre croissant, donc égal à x_j et on pose :
$$D_1 = X_1,\ D_2 = X_2 - X_1, \ldots, D_k = X_k - X_{k-1}.$$
On pose de plus $D_{k+1} = n + 1 - X_k$.
Préciser la loi du vecteur aléatoire $(D_1, D_2, \ldots, D_{k+1})$, et expliquer pourquoi les variables $(D_j)_{1 \le j \le k+1}$ suivent toutes la même loi.

c) En déduire les espérances de X_1 et de X_k, puis la formule :
$$\sum_{i=1}^{n-k+1} i \binom{n-i}{k-1} = \binom{n+1}{k+1}$$

CHAPITRE 8

Réduction II

1 Applications du cours

A Réduction de matrices de petite taille

□ **Exercice 1** Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Étudier la diagonalisabilité de A, puis la « trigonaliser par blocs ».

□ **Exercice 2** Soit $a \in \mathbf{R}$. On note $M(a) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice comportant des a sur la diagonale principale, et des 1 ailleurs.

1) Calculer $\det(M(a))$.
2) Déterminer les éléments propres de A, son polynôme minimal ainsi que son rang en fonction de a.

B Idéaux d'un anneau

□ **Exercice 3** Soit $\mathbf{Z}[i] = \{a + ib/(a,b) \in \mathbf{Z}^2\}$ que l'on munit de l'addition et de la multiplication usuelle de $\mathbf{C}$.

1) Montrer que $\mathbf{Z}[i]$ est un anneau (appelé *anneau des entiers de Gauss*) .
2) On considère $N : \mathbf{Z}[i] \to \mathbf{Z}$ définie par $N : a + ib \mapsto a^2 + b^2$.
   Montrer que pour z, z' dans $\mathbf{Z}[i]$, $N(zz') = N(z)N(z')$.
   En déduire les éléments inversibles de $\mathbf{Z}[i]$.
3) Soit $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Montrer qu'il existe $u \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $|z - u| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire que :
$$\forall\, u \in \mathbf{Z}[i]\ ,\ \forall\, v \in \mathbf{Z}[i]\backslash\{0\}\ ,\ \exists\, q, r \in \mathbf{Z}[i]\ ,\ u = vq + r \text{ avec } N(r) < N(v)$$
4) Soit I un idéal de $\mathbf{Z}[i]$. Montrer qu'il est de la forme $z\mathbf{Z}[i]$ où $z \in I$.
   On pourra s'inspirer de la démonstration faite dans le cas de l'anneau $\mathbf{K}[X]$.

□ **Exercice 4** Soit A un anneau commutatif non nul.
Un idéal I de A est dit premier si et seulement si $\forall (x,y) \in A^2,\ xy \in I \Rightarrow x \in I$ ou $y \in I$.
Montrer que si tout idéal de A est premier alors A est un corps.

□ **Exercice 5** Soit A un anneau commutatif et (I_n) une suite croissante d'idéaux de A. On pose $I = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n$.

1) Montrer que I est un idéal de A.
2) On suppose que A est principal (c'est à dire que tout idéal de A est principal : de la forme xA pour un certain $x \in A$). Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $I = I_{n_0}$.
3) En déduire que $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ n'est pas principal.

□ **Exercice 6** Soit A un anneau commutatif.
Un idéal $\mathfrak{p} \neq A$ est dit *premier* si et seulement si

$$\forall x, y \in A \quad xy \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \mathfrak{p} \text{ ou } y \in \mathfrak{p}$$

Soit $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ des idéaux premiers tels que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$, $\quad \mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$.

1) Soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}$ une famille d'éléments de A tels que $\forall i, j$, $i \neq j$, $\; a_{i,j} \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}_j$. On pose pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $b_j = \prod_{i\neq j} a_{i,j}$.
   Démontrer que pour tout $i \neq j$, $b_j \in \mathfrak{p}_i$ et que $b_j \notin \mathfrak{p}_j$.
2) Soit I un idéal quelconque de A Montrer que :

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \;\Rightarrow\; \exists i_0 \in [\![1, n]\!] \;\; I \subset \mathfrak{p}_{i_0}$$

   On pourra raisonner par l'absurde et considérer $\sum_j b_j c_j$ avec des c_j judicieusement choisis.

C Polynômes d'endomorphismes

□ **Exercice 7** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.
Calculer son polynôme minimal et exprimer, pour tout entier naturel n, A^n en fonction de I_3, A et A^2.

□ **Exercice 8** Calculer les polynômes minimaux de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 9** Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ irréductible. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{R}-$espace vectoriel de dimension finie tel que $P(u) = 0$. Déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}(u^k / k \in \mathbf{N})$.

□ **Exercice 10** Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$ et f un endomorphisme de E.

1) Trouver une condition nécéssaire et suffisante pour que $\lambda f + \mathrm{id}$ soit inversible.
2) Dans le cas où elle est inversible, qu'apporte la condition $f \circ f = f$?

□ **Exercice 11** Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}[X])$ défini par $u : P \mapsto XP$.
Déterminer l'idéal annulateur de u.

□ **Exercice 12** Soit A une matrice carrée d'ordre n réelle qui vérifie :
$$\begin{cases} A^3 + A^2 + A - 3I = 0 \\ A^3 + 2A^2 - 2A - I = 0 \end{cases}$$
Déterminer A.

□ **Exercice 13** Soient $p \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $A^p = I_n$. Démontrer que A est diagonalisable.
Est-ce encore vrai si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$?

□ **Exercice 14** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un automorphisme de E.
Montrer que f^{-1} est un polynôme en f.

D Sous-espaces stables

□ **Exercice 15** Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = f$.
Soit F sous-espace vectoriel de E stable par f, montrer que $F = F_0 \oplus F_1 \oplus F_{-1}$, avec F_0, F_1, F_{-1} des sous-espaces vectoriels des sous-espaces propres de f.

E Matrices définies par blocs

□ **Exercice 16** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0_n & A \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbf{C})$

1) Montrer que A et B ont même spectre.
2) Exprimer B^p en fonction de A^p.
3) Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Exprimer $P(B)$ en fonction de A et P.
4) Déterminer une condition nécéssaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable

□ **Exercice 17** Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & A \end{array}\right)$

1) Déterminer le rang de B en fonction du rang de A .
2) Calculer B^p pour $p \in \mathbf{N}^*$
3) Donner une condition nécéssaire et suffisante pour B soit diagonalisable.

F Calculs de puissances

□ **Exercice 18** Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer M^2.
2) Déterminer $P \in \mathbf{R}_2[X]$ tel que $P(M) = 0$.
3) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P ($n \geqslant 1$).
4) Expliciter M^n ($n \geqslant 1$).

□ **Exercice 19** Calculer la puissance $n^{\text{ième}}$ de $\begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

G Commutants, racines

□ **Exercice 20** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?
2) Montrer que A est semblable à : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3) Montrer que si $M^2 = A$, alors $AM = MA$ ($M \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$).
4) Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ telles que : $M^2 = A$.

□ **Exercice 21** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ ayant n valeurs propres distinctes.

1) Déterminer son commutant, c'est à dire $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AM = MA$.
2) Montrer qu'il est égale à l'algèbre des polynômes en A, dont on précisera la dimension.

2 Exercices plus élaborés

A Réduction de matrices de petite taille

□ **Exercice 22** Soient $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$; on pose :

$$C_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots - & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) La matrice J est-elle diagonalisable ? Donner ses éléments propres ? Calculer J^k, $k \in \mathbf{N}$.
2) Montrer que C_n s'exprime comme un polynôme en J, qu'elle est diagonalisable et donner ses éléments propres. En déduire son déterminant.
3) Calculer $\det(A_n)$.

□ **Exercice 23** On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Étudier la diagonalisablité de A et déterminer ses éléments propres.
On pourra proposer plusieurs méthodes

B Matrices et endomorphismes nilpotents

□ **Exercice 24** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que

$$(M \text{ est nilpotente}) \iff (\forall k \geqslant 1, \operatorname{tr}(M^k) = 0)$$

Pour le sens $\boxed{\Leftarrow}$ on pourra, au choix,

— commencer en trigonalisant M
— utiliser le théorème de Cayley-Hamilton

C Polynômes d'endomorphismes

□ **Exercice 25** Soit α un réel non nul, u, v, f trois endomorphismes de E tels que :

$$f = \alpha\, u + \frac{1}{\alpha}\, v \;,\; f^2 = \alpha^2\, u + \frac{1}{\alpha^2}\, v \;,\; f^3 = \alpha^3\, u + \frac{1}{\alpha^3}\, v$$

Montrer que f est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres possibles.

□ **Exercice 26** (Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton)

1) Si $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$, on note :

$$C(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

Une matrice de ce type sera dite de type **compagne**.

a) Déterminer $\chi_C(X)$.

b) Soit v l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ est C. Montrer que $\chi_v(v) = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{K}^n)}$ (on pourra montrer que $\chi_v(v)$ annule la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$, en commençant par montrer que $\chi_v(v)(\varepsilon_1) = 0_{\mathbf{K}^n}$, puis en en déduisant les $n-1$ dernières images).

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on veut montrer que $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$.

a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{k-1}(x))$ soit libre et que la famille $(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{k-1}(x), u^k(x))$ soit liée.

b) Utiliser ce qui précède pour écrire la matrice de u dans une base intéressante et en déduire que $\chi_u(u)(x) = 0_E$.

c) Conclure.

□ **Exercice 27** Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Montrer que :

$$u \text{ est diagonalisable} \iff (u^2 \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)).$$

Le résultat est-il encore vrai sur $\mathbf{R}$.

□ **Exercice 28** Résoudre l'équation d'inconnue $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$: $A^4 = A$ et $\mathrm{tr}(A) = n$.

□ **Exercice 29** Trouver toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $M^3 - 2M^2 + M = 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

□ **Exercice 30** Trouver toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $M^2 = M^5$ et $\mathrm{tr}(M) = n$.

D Sous-espaces stables

□ **Exercice 31** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1) Montrer que le polynôme caractéristique de A divise tous les polynômes annulateurs de A.

2) Montrer que $\mathbf{R}[A] = \{P(A)\ ,\ P \in \mathbf{R}[X]\}$ est de dimension finie et en trouver une base explicite.

3) Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est de dimension supérieure ou égale à 3.

4) Montrer que : (l'endomorphisme f canoniquement associé à A stabilise le plan d'équation $ax + by + cz = 0$) si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A^\top$.

5) Trouver explicitement les plans que f stabilise.

6) Trouver les projecteurs sur les espaces de dimension 1 ou 2 qui commutent avec A.

□ **Exercice 32** Déterminer les sous-espaces de $\mathbf{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice canonique : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 33**

1) Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ est trigonalisable.
2) Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et soit $D : u \in E \mapsto D(u) = u'$
   Déterminer tous les sous-espaces vectoriels F de E de dimension 2 tels que $D(F) \subset F$

□ **Exercice 34** Soit $A \in \mathscr{M}_{3n}(\mathbf{R})$, telle que $\mathrm{rg}(A) = 2n$ et $A^3 = -A$.

Montrer que 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité n de A, et que A est semblable à la matrice définie par blocs : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

On pourra commencer par décomposer $\mathbf{R}^{3n} = F \oplus G$ avec F et G stables par u (endomorphisme canoniquement associé à A), et $u_G^2 + id_G = 0$.

□ **Exercice 35** Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur x de E tel que $E = \{P(u)(x),\, P \in \mathbf{K}[X]\}$ (un tel vecteur x est dit u-générateur de E).
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On pose $I = \{P \in \mathbf{K}[X],\ P(u)(x) \in F\}$.

1) Montrer que $F = \{P(u)(x),\ P \in I\}$
2) Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $I = \{QR,\ R \in \mathbf{K}[X]\}$.
3) Montrer que Q divise χ_u.
4) Réciproquement, montrez que pour tout diviseur Q de χ_u, le sous-espace $\{(QR)(u)(x),\ R \in \mathbf{K}[X]\}$ est stable par u.
5) Montrer qu'un sous-espace vectoriel est stable par u si et seulement s'il est de la forme $\mathrm{Ker}(T(u))$ avec $T|\chi_u$.
6) Application : déterminer les sous-espaces stables stables par l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice réelle $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

E Divers

□ **Exercice 36** Soit E un espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme de E. Soit a dans E. On suppose quil existe p entier naturel non nul tel que $f^p(a) \neq 0$ et $f^{p+1}(a) = 0$.

1) Montrer que : $p \leqslant n - 1$.
2) Montrer que f n'est pas diagonalisable.

□ **Exercice 37** Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, telles que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$.

1) Montrer que : $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.
2) Montrer que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est tel que : $AM = MB$, alors $M = 0$.
3) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$; montrer qu'il existe un unique $X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $AX - XB = M$.

□ **Exercice 38** Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $a \in \mathbf{R}^*$ tels que : $M^\top = M^{-1} + aI_n$.

1) Déterminer un polynôme annulateur de M.
2) Montrer que M est diagonalisable.

3) Que dire des valeurs propres de M ?

□ **Exercice 39** Soient $f, g \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^n)$ telles que $f^2 = g^2 = -\mathrm{id}$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1) Démontrer que f et g sont des automorphismes.
2) Démontrer que f et g ont mêmes valeurs propres, de mêmes ordres de multiplicité.

□ **Exercice 40** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$.

1) Montrer que pour toutes matrices carrées $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\chi_{MN} = \chi_{NM}$. En déduire que $\chi_{A\bar{A}}$ est à coefficients réels.
2) Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(A\overline{A}) \cap \mathbf{R}_-^*$.
   a) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ un vecteur propre de $A\overline{A}$ associé à λ. Montrer que $Y = A\overline{X}$ est un vecteur propre de $A\overline{A}$ associé à λ, et que la famille (X, Y) est libre.
   b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $X \in \mathrm{Ker}((A\bar{A} - \lambda I)^k)$ et $Y = A\overline{X}$. Montrer que $Y \in \mathrm{Ker}((A\bar{A} - \lambda I)^k)$.
   c) En généralisant le raisonnement de la question i), montrer qu'il existe des vecteurs $X_1, \ldots, X_p \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tels que posant $Y_1 = \bar{A}X_1, \ldots, Y_p = \bar{A}X_p$, la famille $(X_1, \ldots, Y_p)$ soit une base du sous-espace caractéristique $F = \mathrm{Ker}((A\bar{A} - \lambda I)^n)$.
   On pourra construire les X_i de proche en proche et de sorte que la matrice dans la base $(X_1, \ldots, Y_p)$ de l'endomorphisme de F induit par l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ canoniquement associé à $A\bar{A}$ soit triangulaire supérieure.
3) Montrer que $\det(I_n + A\overline{A}) \geqslant 0$.

F Commutants, racines

□ **Exercice 41** Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie. Prouver que si u et v sont deux endomorphismes de E diagonalisables qui commutent alors ils admettent une base commune de vecteurs propres.

□ **Exercice 42** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ distinctes, d'ordre de multiplicité respectifs $r_1, \cdots, r_p$.

1) Montrer que A peut s'écrire : $A = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k P_k$, avec $(P_1, \cdots, P_p)$ une famille de matrices de projections telles que :
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2 \quad , \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i$$
2) Soit $\mathbf{R}[A] = \{P(A) / P \in \mathbf{R}[X]\}$; quelle est la dimension de $\mathbf{R}[A]$? Déterminer une base de $\mathbf{R}[A]$ dans laquelle les polynômes sont tous de degré $p-1$.
   Montrer que les projecteurs ci-dessus sont des polynômes en A.
3) Soit $C_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) / MA = AM\}$ (commutant de A). Montrer que la dimension du commutant de A est $\sum\limits_{k=1}^{p} r_k^2$.
4) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $M^2 = A$; soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M. Montrer que :
$$f \text{ est diagonalisable} \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$$

□ **Exercice 43** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer le commutant de A puis résoudre $X^n = A$, avec $n \in \mathbf{N}^*$.

□ **Exercice 44** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que cette matrice soit diagonalisable. Donner, dans ce cas, ses éléments propres.
2) Déterminer, en discutant sur a, le commutant de A. Quelle est sa dimension ?
3) Déterminer les matrices $X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $X^2 = A$.
4) Déterminer le polynôme minimal de l'idéal annulateur de A, en discutant toujours sur a.

□ **Exercice 45** Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

1) Soit $D \in E$ une matrice diagonale dont les éléments sont distincts deux à deux. Trouver toutes les matrices qui commutent avec D
2) Soit $A \in E$ une matrice admettant n valeurs propres distinctes, et soit $B \in E$ telle que $B^2 = A$. Montrer que B est diagonalisable.
3) Trouver les matrices B telles que $B^2 = A = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -5 \\ 5 & -3 & 3 \\ -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

□ **Exercice 46** Déterminer toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbf{C})$ telles que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

□ **Exercice 47** Résoudre l'équation $X^2 = A$, où X est inconnu dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

On pourra commencer par montrer que A est semblable à : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

□ **Exercice 48** Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

1) Déterminer les éléments propres de A.
2) Déterminer les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $B^3 = A$.

3 Exercices nécessitant plus d'inspiration

□ **Exercice 49** Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$

1) Calculer B^p pour $p \in \mathbf{N}^*$
2) Montrer que si B est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
3) On suppose que A est diagonalisable ; comparer les valeurs propres de A et de B, leur ordre de multiplicité, la dimension des sous-espaces propres.
4) Conclure.

□ **Exercice 50** Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ diagonalisables. Montrer qu'elles ont mêmes sous-espaces propres si et seulement s'il existe deux polynômes Q et R de $\mathbf{R}[X]$ tels que : $A = Q(B)$ et $B = R(A)$.

Table des matières