Exercice I

Dans tout cet exercice, on considère les suites $(H_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } u_n = H_n - \ln n$$

1) Etablir pour tout entier naturel k non nul, l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

2) a) En utilisant le résultat de la question 1, montrer pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement suivant :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

b) En déduire un équivalent simple de H_n quand n tend vers $+\infty$.

3) a) En utilisant à nouveau l'encadrement obtenu à la question 1, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

b) Montrer que cette suite est convergente ; on note γ sa limite. Montrer que γ appartient à $[0, 1]$.

On a montré que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

Exercice II

1) a) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles ou complexes.

On pose pour $n \geqslant 0$: $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$, avec la convention $B_{-1} = 0$.

Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

b) On suppose maintenant que (a_n) est une suite réelle.

Montrer que si la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_k b_k$ est convergente.

On pourra montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} (a_k - a_{k+1}) B_k$ est absolument convergente.

2) a) Calculer les sommes partielles de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \sin k$ et justifier qu'elles forment une suite bornée.

b) Montrer que $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{\sin k}{\ln(k+2)}$ est convergente.