Exercice I

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$: $\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$ (par décroissance de $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $[k, k+1]$).

Par croissance de l'intégrale, on a donc : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dt = \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dt = \frac{1}{k}$

Ainsi $\boxed{\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}}$.

2) a) Pour un entier n non nul, on somme de $k=1$ à $k=n-1$:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^n \frac{1}{t}\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$ (on a utilisé la relation de Chasles)

Ainsi $-1 + H_n \leqslant \displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}$ et donc

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

b) Pour $n \geqslant 2$, on divise par $\ln(n) > 0$ et donc : $1 + \dfrac{1}{\ln(n)n} \leqslant \dfrac{H_n}{\ln n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\ln(n)}$ et donc par le théorème d'encadrement, $\left(\dfrac{H_n}{\ln n}\right)$ converge vers 1, et finalement

$$\boxed{H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

3) a) Pour tout n non nul, $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant 0$ d'après 1). La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est donc décroissante.

b) D'après 2) a), pour tout $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1$, donc $u_n \in [0,1]$ est une suite minorée et décroissante, donc elle converge vers γ.
Comme pour tout $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant \leqslant u_n \leqslant 1$, par passage à la limite on a $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

Exercice II

1) a) Soit n un entier naturel. Pour tout entier naturel k, $b_k = B_k - B_{k-1}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\
&= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k
\end{aligned}$$

Remarque : Il y a un analogie avec l'intégration par parties, le passage aux sommes partielles étant analogue à une primitivation, et les taux d'accroissement $a_{k+1} - a_k = \frac{a_{k+1}-a_k}{(k+1)-1}$ étant analogues à des dérivées.

b) On suppose que (B_n) est bornée et que (a_n) est décroissante. Pour tout entier naturel k,

$$|(a_k - a_{k+1})B_k| \leqslant |a_k - a_{k+1}|M = (a_k - a_{k+1})M$$

où M est un majorant de $(|B_n|)$. Notons que le fait que (a_n) décroit permet d'enlever les valeurs absolues autour de $(a_k - a_{k+1})$.

La suite (a_n) décroit vers 0, c'est donc une suite de réels positifs. De ce fait, pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} |(a_k - a_{k+1})B_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1})M = M(a_0 - a_{n+1}) \leqslant Ma_0$$

La série $\sum\limits_{k\geqslant 0} |(a_k - a_{k+1})B_k|$ est donc une série positive dont les sommes partielles sont majorées. C'est une série convergente.

Cela prouve de que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} (a_k - a_{k+1})B_k$ est absolument convergente donc convergente.

De plus, la suite (a_nB_n) converge (vers 0) car (a_n) tend vers 0 et que (B_n) est bornée. On obtient finalement que la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_kb_k$ converge ce qui prouve que la série est convergente.

Remarque : la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} a_kb_k$ n'est pas à priori absolument convergente.

2) a) Pour tout entier naturel n,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(e^{ik}) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right)$$

Or pour tout complexe z, $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$ (pour tous réels x, y on a $|y| = \sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$).
Donc

$$|B_n| \leqslant \left|\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right| = \frac{|1-e^{i(n+1)}|}{|1-e^{i}|} \leqslant \frac{|1| + |e^{i(n+1)}|}{|1-e^{i}|} = M$$

avec $M = \frac{2}{|1-e^i|}$ (qui vaut aussi $\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$)

Remarque : on peut aussi calculer explicitement B_n en utilisant que

$$1 - e^{i(n+1)} = -e^{i\frac{n+1}{2}} \times 2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

et que

$$1 - e^{i} = -e^{\frac{i}{2}} \times 2i\sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

b) Posons $b_k = \sin k$, $a_k = \frac{1}{\ln(k+2)}$ et $u_k = a_kb_k$. La série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{\sin k}{\ln(k+2)}$ converge d'après la question 1.b.