

Partie I

- 1) Toute valeur de $\llbracket 1, n \rrbracket$ convient pour p car f^p est bijectif comme composé d'endomorphismes bijectifs, donc $\text{Ker}(f^p) = \{0\}$ et $\text{Im}(f^p) = E$ sont supplémentaires.
- 2) a) Comme les lignes L_1 et L_3 de la matrice sont opposées mais les deux premières lignes sont non colinéaires, f est de rang 2.

Comme de plus les deux premières colonnes de la matrice sont non colinéaires, $\text{Im}(f)$ admet pour base $(4e_1 - 2e_2 - 4e_3, -e_1 - e_2 + e_3)$ ou encore $(-2e_1 + e_2 + 2e_3, e_1 + e_2 - e_3)$.

Soit $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(x)$.

On a

$$x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

On en déduit que

$$\text{Ker}(f) = \{(-x_3, x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Finalement $\text{Ker}(f)$ admet pour base $(-e_1 + e_2 + e_3)$.

Calculons le déterminant dans la base (e_1, e_2, e_3) de la concaténée des bases précédentes :

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(avec $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$)

Ainsi cette concaténée n'est pas libre, donc $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont pas en somme directe, et ainsi on ne peut pas prendre $p = 1$.

- b) Pour commencer

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(f^2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Cela montre que $\text{Im}(f^2)$ a pour base $(e_1 + e_2 - e_3)$. Comme de plus, $\text{Ker}(f^2)$ a pour équation $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. C'est un hyperplan qui ne contient pas la droite $\text{Im}(f^2)$ car $1 - 1 + 2 \cdot (-1) \neq 0$, donc $\text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f^2)$ sont supplémentaires.

- 3) a) Pour tout $x \in \text{Ker}(f^k)$, $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(f^{k+1})$
De plus, $\text{Im}(f^{k+1}) = f^k(f(E)) \subset f^k(E) = \text{Im}(f^k)$
- b) D'après le i) de la question précédente, la suite (a_k) est croissante. Si elle était strictement croissante, comme elle est composée d'entiers naturels, elle tendrait vers $+\infty$. Ceci est contradictoire car la suite (a_k) est majorée par la dimension n de E .
Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k = a_{k+1}$.
- c) On peut considérer le plus petit entier tel que $a_k = a_{k+1}$ (toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément). Notons le p .

On voit que $p \geq 1$ car pour $k = 0$, $a_0 = 0 = \dim(\text{Ker}(\text{id}))$ et $a_1 = \dim(\text{Ker}(f)) > 0$ puisque f n'est pas injectif car sinon il serait bijectif (f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie).

Comme

$$\text{Ker}(f^0) \subset \text{Ker}(f^1) \subset \dots \subset \text{Ker}(f^p) \subset \text{Ker}(f^{p+1}),$$

on a, en utilisant les dimensions :

$$\text{Ker}(f^0) \subsetneq \text{Ker}(f^1) \subsetneq \dots \subsetneq \text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$$

Soit $k \geq p$, montrons que $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k+1})$. Une des inclusions est immédiate. Pour $x \in \text{Ker}(f^{k+1})$ on a $f^{p+1}(f^{k-p}(x)) = 0$. Cela implique que $f^{k-p}(x) \in \text{Ker}(f^{p+1}) = \text{Ker}(f^p)$ et donc $x \in \text{Ker}(f^k(x))$.

On en déduit par récurrence que $\forall k \geq p$, $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p)$.

- d) Comme E est de dimension finie, sa dimension est la somme des dimensions de $\text{Ker}(f^p)$ et de $\text{Im}(f^p)$ par le théorème du rang.
 Il suffit donc de prouver que $\text{Ker}(f^p)$ et $\text{Im}(f^p)$ sont en somme directe pour en déduire qu'ils sont supplémentaires.
 Soit $x \in \text{Ker}(f^p) \cap \text{Im}(f^p)$. Par définition, x a un antécédent α par f^p , et on a

$$0 = f^p(x) = f^{2p}(\alpha)$$

donc $\alpha \in \text{Ker}(f^{2p}) = \text{Ker}(f^p)$, car $2p \geq p$.
 Ainsi $0 = f^p(\alpha) = x$, ce qu'il fallait démontrer.

Partie II

- 4) a) On reprend les notations de la question 3 (qui s'applique car f n'est pas bijectif car sinon $p = 1$ conviendrait, mais on a supposé $p = n > 1$).

On a $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$. On en déduit que $a_n \geq n$ et donc que $a_n = n$. Cela montre que $\text{Ker}(f^n) = E$ et donc que f^n est l'endomorphisme nul.

En reprenant le calcul précédent, $a_1 = 1$ (car sinon $a_n > n$).

- b) Procédons par analyse-synthèse :

— Analyse : Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(\varepsilon_1) = 0$, $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$ et $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$.

Commençons par chercher ε_3 . On voit que $f^3(\varepsilon_3) = f^2(\varepsilon_2) = f(\varepsilon_1) = 0$. Par contre $f^2(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 \neq 0$ puisque que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Cela signifie que $\varepsilon_3 \in \text{Ker}(f^3) \setminus \text{Ker}(f^2)$. En calculant on obtient que

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0$$

On peut donc prendre (par exemple) $\varepsilon_3 = (1, 0, 0) \in \text{Ker}(f^3) \setminus \text{Ker}(f^2)$.

On pose alors $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3) = (1, -1, 0)$ et $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2) = (1, 1, 1)$.

- Synthèse : On pose $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 comme trouvé ci-dessus. On vérifie alors que

$$\det(\text{Mat}_{\text{can}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Cela montre que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme f^3 annule chacun des vecteurs de la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ c'est l'endomorphisme nul, mais f^2 n'annule pas ε_3 donc n'est pas l'endomorphisme nul.

Ainsi $\text{Ker}(f^2) \subsetneq \text{Ker}(f^3) = \{0\} = \text{Ker}(f^4)$. Donc $p = 3$.

- 5) a) Soit $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$. Le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(f^k)$ étant un sous-espace vectoriel strict de $\text{Ker}(f^{k+1})$ (qui est de dimension finie), il admet dans cet espace un supplémentaire non réduit au vecteur nul.

- b) On choisit une base $(e_1, \dots, e_{a_1})$ de $\text{Ker}(f)$.

On se donne ensuite un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans $\text{Ker}(f^2)$ et on choisit une base $(e_{a_1+1}, \dots, e_{a_2})$ de ce supplémentaire. On obtient ainsi une base $(e_1, \dots, e_{a_2})$ de $\text{Ker}(f^2)$.

On continue ainsi jusqu'à obtenir une base $(e_1, \dots, e_{a_p})$ de $\text{Ker}(f^p) = E$ (avec $a_p = n$).

Comme a_1 n'est pas nul (sinon f serait injectif donc bijectif et p vaudrait 1), $e_1 \in \text{Ker}(f)$ car $1 \leq a_1$.

Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, notant i l'unique entier tel que $a_i < k \leq a_{i+1}$, on a $0 = f^{i+1}(e_k) = f^i(f(e_k))$ donc $f(e_k) \in \text{Ker}(f^i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{a_i}) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$ car $a_i < k$ donc $a_i \leq k-1$.

Remarquons que la matrice de f dans cette base est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

Partie III

- 6) L'application φ_k est bien à valeurs dans $\text{Ker}(f^k)$ car pour tout $x \in G_{k+1}$, comme $G_k \subset \text{Ker}(f^{k+1})$,

$$0 = f^k(f(x)) = f^k(\varphi_k(x))$$

donc $\varphi_k(x) \in \text{Ker}(f^k)$.

La linéarité de φ_k résulte de celle de f .

7) Par définition, $\text{Ker}(\varphi_k) = G_{k+1} \cap \text{Ker}(f)$.

Soit $k \geq 1$. On sait que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^k)$ donc $\text{Ker}(\varphi_k) \subset G_{k+1} \cap \text{Ker}(f^k) = \{0\}$.

Ainsi φ_k est injective donc induit un isomorphisme de G_{k+1} vers $\varphi_k(G_{k+1}) = f(G_{k+1})$, qui ont ainsi même dimension.

8) Soit $x \in f(G_{k+1}) \cap \text{Ker}(f^{k-1})$.

Le vecteur x a donc au moins un antécédent α par f dans G_{k+1} .

Comme $0 = f^{k-1}(x) = f^k(\alpha)$, $\alpha \in G_{k+1} \cap \text{Ker}(f^k) = \{0\}$ et donc $x = 0$.

On a donc montré que $f(G_{k+1}) \cap \text{Ker}(f^{k-1}) \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque est évidente.

9) Par la question précédente,

$$\dim(f(G_{k+1})) + \dim(\text{Ker}(f^{k-1})) = \dim(f(G_{k+1}) + \text{Ker}(f^{k-1})) \leq \dim(\text{Ker}(f^k)) = a_k$$

car $f(G_{k+1})$ et $\text{Ker}(f^{k-1})$ sont deux sous-espaces de $\text{Ker}(f^k)$.

De plus $\dim(f(G_{k+1})) = \dim G_{k+1}$ par la question 7), donc $\dim(f(G_{k+1})) = a_{k+1} - a_k$.

On a donc

$$(a_{k+1} - a_k) + a_{k-1} \leq a_k$$

Donc

$$a_{k+1} - a_k \leq a_k - a_{k-1}$$

10) On a ici par hypothèse $a_{n-1} = n$ et $a_{n-1} - a_{n-2} \geq 1$. Par ce qui précède, $a_1 - 0 = a_1 - a - 0 \geq a_2 - a_1 \geq \dots \geq a_{n-1} - a_{n-2} \geq 1$.

Ainsi d'une part, $a_1 \geq 1$ (f n'est pas injectif).

D'autre part, $a_1 = (a_1 - a_2) + \dots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_{n-1} \leq (n-2) \cdot (-1) + n = 2$.

Si (absurde) $a_1 = 1$, alors $1 = a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \dots = a_{n-1} - a_{n-2}$, donc $n-1 = a_{n-1} - a_0 = n$, ce qui est contradictoire.

Donc $a_1 = 2$.