Dans le sujet $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel au moins égal à 2.
On considère un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E de dimension n.
On désigne par id l'endomorphisme identité et par 0 l'endomorphisme nul.
On rappelle que si $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$, et que $f^0 = \mathrm{id}$.

Partie I

Le but de cette partie est de démontrer que, pour tout endomorphisme f de E , il existe un entier p compris entre 1 et n qui vérifie :

$$E = \mathrm{Ker}\,(f^p) \oplus \mathrm{Im}\,(f^p) \tag{1}$$

1) Dans cette question, f est un endomorphisme bijectif de E. Donner une valeur de p satisfaisant (1).
2) Dans cette question, $n = 3$ et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On suppose que f est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

   a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. Peut-on avoir $p = 1$?
   b) Montrer que : $E = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Im}(f^2)$.
3) Dans cette question, on suppose que l'endomorphisme f n'est pas bijectif. Pour tout entier naturel k, on note a_k la dimension de $\mathrm{Ker}(f^k)$.
   a) Soit k un entier naturel ; montrer que $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$.
   b) Montrer qu'il existe des entiers naturels k tels que $a_k = a_{k+1}$.
   c) En déduire l'existence d'un entier p, supérieur ou égal à 1 tel que pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}(f^k) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^{k+1}) & \text{si } k \leqslant p-1 \\ \mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^p) & \text{si } k \geqslant p \end{cases}$$

   d) Déduire de ce qui précède que : $E = \mathrm{Ker}\,(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$

Dans toute la suite du problème, p désigne le plus petit entier vérifiant (1). *C'est celui qui a été obtenu à la question 3)*

Partie II

4) a) On suppose que $p = n$. Montrer que f^n est l'endomorphisme nul. Quel est la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$?
   b) Dans cette question, $n = 3$ et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On suppose que f est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$f(\varepsilon_1) = 0 \quad , \quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \quad , \quad f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$$

   Montrer que $p = 3$.

5) On suppose ici que p est supérieur ou égal à 2 et que l'on a de plus : $\mathrm{Ker}(f^p) = E$.

a) Justifier que pour tout entier k vérifiant : $0 \leqslant k \leqslant p-1$, on peut définir un sous-espace vectoriel, non réduit au vecteur nul, supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f^k)$ dans $\mathrm{Ker}(f^{k+1})$.

b) En déduire l'existence d'une base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de E telle que

$$f(e_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \{2, \ldots, n\}\ , \quad f(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_{k-1})$$

Que dire alors de la matrice de f dans la base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$?

Partie III

Le but de cette partie est de montrer que la suite $(a_k - a_{k-1})_{k \geqslant 1}$ est décroissante.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, on appelle G_{k+1} un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f^k)$ dans $\mathrm{Ker}(f^{k+1})$.

Soit $\varphi_k : \begin{array}{ccc} G_{k+1} & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(f^k) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

6) Justifier que φ_k est bien définie, et qu'elle est linéaire.

7) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi_k)$; en déduire, pour $k \geqslant 1$, que $\dim(G_{k+1}) = \dim(f(G_{k+1}))$.

8) Montrer que : $f(G_{k+1}) \bigcap \mathrm{Ker}(f^{k-1}) = \{0\}$.

9) En déduire que $a_{k+1} - a_k \leqslant a_k - a_{k-1}$ ($k \geqslant 1$) (les a_k sont définis dans la partie I).

10) **Application :** on suppose ici que $f^{n-1} = 0$ et $f^{n-2} \neq 0$; calculer $\dim \mathrm{Ker}(f)$.