

– Partie I –

1) Convergence de la suite $\left(\frac{J_p}{I_p}\right)$

a) On considère la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\pi}{2} \sin(t) - t.$$

Elle est \mathcal{C}^∞ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$f'(t) = \frac{\pi}{2} \cos(t) - 1 \text{ et } f''(t) = -\frac{\pi}{2} \sin(t).$$

On peut alors établir le tableau de variations de f .

t	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$f''(t)$		-	-
$f'(t)$	$\frac{\pi}{2} - 1$	0	-1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0		0

L'existence de α résulte du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue f' qui vérifie $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0 > -1 = f'(\frac{\pi}{2})$.

On en déduit que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(t) \geq 0$ et donc $\frac{\pi}{2} \sin(t) \leq t$.

Remarque : Cette question peut aussi se traiter en justifiant que $t \mapsto \sin t$ est concave. Sa courbe se situe donc au dessus de sa corde entre le point de coordonnées $(0, 0)$ et celui de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

b) On en déduit : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq t^2 \leq \left(\frac{\pi}{2} \sin(t)\right)^2 \implies 0 \leq t^2 \cos^{2p}(t) \leq \frac{\pi^2}{4} \sin^2(t) \cos^{2p}(t)$ car $\cos^{2p}(t) \geq 0$.

D'où : $0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^{2p}(t) dt = \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^{2p}(t) dt = \frac{\pi^2}{4} (I_p - I_{p+1})$
 par linéarité de l'intégrale.

c) On reconnaît une intégrale de Wallis. On a par intégration par parties (les applications sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$) :

$$\begin{aligned} I_{p+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^{2p+1} t dt = [(\sin t) \cos^{2p+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2p+1) \sin t (-\sin t) \cos^{2p} t dt \\ &= 0 + (2p+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{2p} t dt = (2p+1)(I_p - I_{p+1}) \end{aligned}$$

d'où $(2p+2)I_{p+1} = (2p+1)I_p \iff \boxed{I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} I_p}$ pour $p \geq 0$.

d) • $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2} > 0$; une récurrence simple en utilisant la relation précédente permet de conclure : $I_p > 0$ pour tout $p \geq 0$.

• On a donc par b) en multipliant par $\frac{1}{I_p} > 0$:

$$0 \leq \frac{J_p}{I_p} \leq \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{I_{p+1}}{I_p}\right) = \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{2p+1}{2p+2}\right) \rightarrow 0 \text{ quand } p \text{ tend vers } +\infty.$$

Ainsi $\frac{J_p}{I_p}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$ par le théorème d'encadrement.

2) Convergence et limite de la suite (S_n) .

a) Les applications $t \mapsto t$, $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto \cos^{2p}(t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_p &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \cos^{2p} t \, dt = [t \cos^{2p} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t (2p)(-\sin t) \cos^{2p-1} t \, dt \\ &= 0 + (2p) \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) \cos^{2p-1}(t) \, dt \\ &= 2p \left(\left[\frac{t^2}{2} \sin(t) \cos^{2p-1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} (\cos(t) \cos^{2p-1}(t) - (2p-1) \sin^2(t) \cos^{2p-2}(t)) \, dt \right) \\ &= 0 - p \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} \cos^{2p}(t) \, dt - (2p-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2} (1 - \cos^2(t)) \cos^{2p-2}(t) \, dt \right) \\ &= -p(2p J_p - (2p-1) J_{p-1}) \end{aligned}$$

D'où : $I_p = p(-2p J_p + (2p-1) J_{p-1})$ ($p \geq 1$)

b) En divisant par $I_{p-1} > 0$, on a, en utilisant plusieurs fois la relation obtenue en 1) c) :

$$\begin{aligned} \frac{I_p}{I_{p-1}} = \frac{2p-1}{2p} &= p \left(-2p \frac{J_p}{I_{p-1}} + (2p-1) \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} \right) = p \left((-2p) \frac{J_p}{I_p} \frac{2p-1}{2p} + (2p-1) \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} \right) \\ &= p(2p-1) \left(-\frac{J_p}{I_p} + \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} \right) \end{aligned}$$

On en déduit pour $p \geq 1$: $\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}$.

c) • On a vu que $I_0 = \frac{\pi}{2}$; $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \, dt = \frac{\pi^3}{24}$.

• Or on a $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} = 2 \sum_{p=1}^n \left(\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} \right) = 2 \left(\sum_{p=1}^n \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \sum_{p=1}^n \frac{J_p}{I_p} \right) = 2 \left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{J_p}{I_p} - \sum_{p=1}^n \frac{J_p}{I_p} \right)$

ainsi : $S_n = 2 \left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n} \right) \rightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$ par 1) d).

D'où $S = 2 \frac{J_0}{I_0} = 2 \frac{\pi^3}{24} \frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$.

- Partie II -

3) Sommation de séries télescopiques

a) Soit f dans E :

- Par opérations sur les fonctions continues : composition ($x \mapsto x+1$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} à valeurs dans $]1, +\infty[$, intervalle sur lequel f est continue, donc $x \mapsto f(x+1)$ est continue sur \mathbb{R}^{+*}) et combinaison linéaire, Δf est bien continue sur \mathbb{R}^{+*} si f l'est.

- Par composition des limites : $x \mapsto x+1$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc $x \mapsto f(x+1)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Ainsi $x \mapsto f(x+1) - f(x) = (\Delta f)(x)$ tend vers 0 en $+\infty$.

- $\forall f, g \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \Delta(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)(x+1) - (\lambda f + \mu g)(x) \\ &= \lambda(f(x+1) - f(x)) + \mu(g(x+1) - g(x)) \\ &= \lambda(\Delta f)(x) + \mu(\Delta g)(x) = (\lambda(\Delta f) + \mu(\Delta g))(x) \end{aligned}$$

D'où $\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda(\Delta f) + \mu(\Delta g)$:

Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

b) Si $n \geq 1$, on a $T_n = \sum_{p=1}^n (\Delta f)(p) = \sum_{p=1}^n f(p+1) - f(p) = \sum_{p=1}^n f(p+1) - \sum_{p=1}^n f(p)$
 $= \sum_{p=2}^{n+1} f(p) - \sum_{p=1}^n f(p) = f(n+1) - f(1)$. Or f étant de limite nulle en $+\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = -f(1)$.

Ainsi la série $\sum_{p \geq 1} ((\Delta f)(p))$ est convergente et $\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p) = -f(1)$.

• De même, si $n \leq N$: $\sum_{p=n+1}^N (\Delta f)(p) = \sum_{p=n+1}^N f(p+1) - f(p) = \sum_{p=n+1}^N f(p+1) - \sum_{p=n+1}^N f(p)$
 $= \sum_{p=n+2}^{N+1} f(p) - \sum_{p=n+1}^N f(p) = -f(n+1) + f(N+1)$

Or f étant de limite nulle en $+\infty$, en faisant tendre N vers $+\infty$ à n fixé, on a :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p) = -f(n+1)$$

c) $\forall x > 0, \Delta f_{k-1}(x) = \frac{1}{(x+1)(x+1+1)(x+1+2)\dots(x+1+(k-1))} - \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)}$
 $= \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x} \right) = \frac{-k}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k)}$

Donc $\Delta f_{k-1} = -k f_k$ si $k \geq 1$.

d) i) $f_k(p) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{p^{k+1}}$ or $\sum_{p \geq 1} \left(\frac{1}{p^{k+1}} \right)$ est une série de Riemann convergente

car $k+1 \geq 1+1 = 2 > 1$; les séries étant à termes positifs, $\sum (f_k(p))_{p \geq 1}$ est convergente.

D'après 3)b) et 3) c) on a :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = -\frac{1}{k} \sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f_{k-1})(p) = -\frac{1}{k} (-f_{k-1}(n+1)) = \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}$$

4) a) Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, si k un entier supérieur à 1 :

$$k \leq t \leq k+1 \implies \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}, \text{ d'où : } \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{k^2}$$

En sommant de $k = n$ à $k = N-1$ on a : $\sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_n^N \frac{1}{t^2} dt \leq \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{k^2}$ ainsi :

$$\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \leq \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{k^2}$$

On fait alors tendre N vers $+\infty$ à n fixé : $R_n \leq \frac{1}{n} \leq R_n + \frac{1}{n^2}$ et donc : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$.

b) Ainsi, pour que R_{N_0} soit inférieur à 10^{-2} , il suffit que $\frac{1}{N_0} \leq 10^{-2}$, et donc $N_0 = 100$ convient.

c) En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'encadrement $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$ déterminé à la question 4)a) on obtient que $R_n \sim \frac{1}{n}$.

5) a)

$$a_1(p) = \frac{1}{p^2} - f_1(p)$$

Remarquons que $\frac{1}{p^2} = \frac{p+1}{p} f_1(p)$.

Ainsi $a_1(p) = \left(\frac{p+1}{p} - 1\right) f_1(p) = \frac{1}{p} f_1(p)$.

b) On a par linéarité de la sommation des séries convergentes :

$$\begin{aligned} \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p} f_1(p) &= \sum_{p=n+1}^{\infty} a_1(p) \\ &= \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=n+1}^{\infty} f_1(p) \\ &= \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n+1} \quad \text{en utilisant la question 3)d)ii)} \\ &= R_n - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

c) Les $f_1(p)$ sont positifs et pour tout $p \geq n+1$ on a $0 \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{n+1}$.

Donc

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p} f_1(p) \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{n+1} f_1(p) \leq \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+1}$$

(en utilisant à nouveau 3)d)ii)

D'où l'encadrement demandé.

d) Comme $S - \left(S_n + \frac{1}{n+1}\right) = R_n - \frac{1}{n+1} \geq 0$, il suffit de prendre $N_1 = 9$ pour avoir

$$0 \leq S - \left(S_{N_1} + \frac{1}{N_1+1}\right) \leq 10^{-2}.$$

On obtient ainsi une approximation de $\frac{\pi^2}{6}$ à 10^{-2} près avec beaucoup moins de calculs (on rappelle que $N_0 = 100$).

6) a) Soit $p \geq 1$. On procède à une récurrence sur l'entier q .

La propriété à démontrer est vraie au rang $q = 1$ d'après la question 5)a).

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_q(p) = \frac{q!}{p} f_q(p)$.

Alors $a_{q+1}(p) = a_q(p) - q! f_{q+1}(p) = q! \left(\frac{1}{p} f_q(p) - f_{q+1}(p)\right)$.

Remarquant que $f_q(p) = (p+q+1) f_{q+1}(p)$, il vient :

$$a_{q+1}(p) = q! \left(\frac{p+q+1}{p} - 1 \right) f_{q+1}(p) = (q+1)! f_{q+1}(p)$$

Par récurrence, la propriété est démontrée.

b) Soient $n, q \geq 1$.

On a par linéarité de la sommation des séries convergentes :

$$\begin{aligned} \sum_{p=n+1}^{\infty} a_q(p) &= \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q (k-1)! \sum_{p=n+1}^{\infty} f_k(p) \\ &= \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q (k-1)! \frac{1}{k(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \quad \text{en utilisant la question 3)d)ii)} \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la question précédente, $\sum_{p=n+1}^{\infty} a_q(p) = q! \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p} f_q(p)$

Or les $f_q(p)$ sont positifs et pour tout $p \geq n+1$ on a $0 \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{n+1}$.

Donc

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} a_q(p) \leq q! \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{n+1} f_q(p) \leq q! \frac{1}{n+1} \frac{1}{q(n+1)(n+2)\dots(n+q)}$$

(en utilisant à nouveau 3)d)ii)

D'où, après simplification, l'encadrement demandé.

c) Comme $\sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = S - S_n = \frac{\pi^2}{6} - S_n$, l'encadrement précédent s'écrit

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}$$

avec

$$S'_n = S_n + \sum_{k=1}^q \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)}.$$

d) Pour $q = 2$, on a

$$S'_n = S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

et l'encadrement s'écrit

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$$

- Partie III -

7) La relation s'écrit $u_{n-1} = -\sum_{p=2}^n \frac{u_{n-p}}{p!}$. Avec la relation $u_0 = 1$ on en déduit qu'il existe bien une unique suite de nombres réels vérifiant cette relation.
De plus, par récurrence FORTE, les u_n sont tous rationnels.

$$\begin{aligned} u_1 &= -\sum_{p=2}^2 \frac{u_{2-p}}{p!} = -\frac{u_0}{2} = -\frac{1}{2} \\ u_2 &= -\sum_{p=2}^3 \frac{u_{3-p}}{p!} = -\frac{u_1}{2} - \frac{u_0}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \\ u_3 &= -\sum_{p=2}^4 \frac{u_{4-p}}{p!} = -\frac{u_2}{2} - \frac{u_1}{6} - \frac{u_0}{24} = -\frac{1}{24} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24} = 0 \end{aligned}$$

8) a) i)

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1 + u_0X = -\frac{1}{2} + X \\ U_2 &= u_2 + u_1X + \frac{u_0X^2}{2} = \frac{1}{12} - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{2} \\ U_3 &= u_3 + u_2X + \frac{u_1X^2}{2} + \frac{u_0X^3}{6} = \frac{X}{12} - \frac{X^2}{4} + \frac{X^3}{6} \end{aligned}$$

Remarque : les u_n (respectivement : les U_n) sont appelés **nombres (resp : polynômes) de Bernoulli**.

ii) Pour tout $n \geq 1$,

$$U'_n = \sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}X^{p-1}}{(p-1)!} = \sum_{q=0}^{n-1} \frac{u_{n-(q+1)}X^q}{q!} = U_{n-1}$$

par le changement d'indice $q = p - 1$, $p = q + 1$.

Pour tout $n \geq 2$,

$$U_n(1) - U_n(0) = \sum_{p=0}^n \frac{u_{n-p}(1-0^p)}{p!} = \sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}}{p!} = 0$$

donc $U_n(1) = U_n(0)$.

b) i) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence sur p , on a pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $V_n^{(p)} = V_{n-p}$.

Ainsi $V_n^{(n+1)} = V_0' = 0$ donc $\deg(V_n) \leq n$. Par la formule de Taylor,

$$V_n = \sum_{p=0}^n \frac{V_n^{(p)}(0)X^p}{p!} = \sum_{p=0}^n \frac{V_{n-p}(0)X^p}{p!}$$

ii)

$$\sum_{p=1}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = V_n(1) - V_n(0) = 0$$

iii) D'après la question précédente et l'unicité de la suite (u_n) , on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n(0) = u_n.$$

Puis par définition des U_n et par la question 8)b)i), on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \sum_{p=0}^n \frac{u_{n-p}X^p}{p!} = U_n$.

c) Posons $V_n = (-1)^n U_n(1-X)$.

On a $V_0 = 1$. De plus pour tout $n \geq 1$ $V_n' = (-1)^n (-1)U_n'(1-X) = (-1)^{n-1} U_{n-1}(1-X) = V_{n-1}$.

Enfin pour tout $n \geq 2$, $V_n(0) = (-1)^n U_n(1) = (-1)^n U_n(0) = V_n(1)$.

D'après la question b), $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = U_n$.

Soit $p \geq 1$. On a $u_{2p+1} = U_{2p+1}(0)$.

Or $U_{2p+1}(0) = U_{2p+1}(1)$ par 8)a)ii), et $U_{2p+1}(1) = -U_{2p+1}(0)$ en évaluant l'égalité précédente en 1.

Ainsi $u_{2p+1} = 0$.

9) a) Vérifions l'égalité à démontrer au rang $q = 0$. Le membre de droite s'écrit

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \frac{x - \frac{1}{2}}{(x+p)^3} dx &= 2 \int_0^1 \frac{x + p - p - \frac{1}{2}}{(x+p)^3} dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - (2p+1) \int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^3} \\ &= 2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) - \left(p + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2} \right) \end{aligned}$$

La différence des deux membres est égale à

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \left(p + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \left(p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{p^2} + \left(p + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{(p+1)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Passons à l'hérédité. Soit $q \in \mathbb{N}$.

En posant $A_q = (2q+2)! \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)dx}{(x+p)^{2q+3}}$, on a :

$$\begin{aligned} A &= (2q+2)! \int_0^1 U_{2q+2}'(x)(x+p)^{-2q-3} dx \\ &= (2q+2)! \left([U_{2q+2}(x)(x+p)^{-2q-3}]_0^1 - \int_0^1 U_{2q+2}(x)(-2q-3)(x+p)^{-2q-4} dx \right) \\ &= (2q+2)! u_{2q+2} \left(\frac{1}{(p+1)^{2q+3}} - \frac{1}{p^{2q+3}} \right) + (2q+3)! \int_0^1 U_{2q+2}(x)(x+p)^{-2q-4} dx \\ &= (2q+2)! u_{2q+2} \left(\frac{1}{(p+1)^{2q+3}} - \frac{1}{p^{2q+3}} \right) + (2q+3)! u_{2q+3} \left(\frac{1}{(p+1)^{2q+4}} - \frac{1}{p^{2q+4}} \right) \\ &\quad + (2q+4)! \int_0^1 U_{2q+3}(x)(x+p)^{-2q-5} dx \end{aligned}$$

Comme $u_{2q+3} = 0$, on en déduit l'hérédité de la propriété à démontrer.

b) Sommons l'égalité précédente pour p allant de n à N (pour $1 \leq n \leq N$).

La somme des membres de gauche est égale à :

$$\begin{aligned} & \sum_{p=n}^N \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{p=n}^N \frac{1}{p^2} + \sum_{p=n+1}^{N+1} \frac{1}{p^2} \right) + \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \sum_{p=n}^N \left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{2n^2} - \sum_{p=n+1}^N \frac{1}{p^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} + \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left(\frac{1}{n^{2k+1}} - \frac{1}{(N+1)^{2k+1}} \right) \end{aligned}$$

(par simplification télescopique)

La somme des membres de droite est majorée en valeur absolue par

$$\begin{aligned} & \sum_{p=n}^N (2q+2)! M_{2q+1} \int_0^1 |(x+p)^{-2q-3}| dx \\ &= \sum_{p=n}^N (2q+2)! M_{2q+1} \frac{1}{-2q-2} ((p+1)^{-2q-2} - p^{-2q-2}) \\ &= (2q+1)! M_{2q+1} \left(\frac{1}{n^{2q+2}} - \frac{1}{(N+1)^{2q+2}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{2n^2} - \sum_{p=n+1}^N \frac{1}{p^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left(\frac{1}{n^{2k+1}} - \frac{1}{(N+1)^{2k+1}} \right) \right| \leq (2q+1)! M_{2q+1} \left(\frac{1}{n^{2q+2}} - \frac{1}{(N+1)^{2q+2}} \right) \end{aligned}$$

Passant aux limites quand $N \rightarrow \infty$ et remarquant que la limite d'une valeur absolue est la valeur absolue de la limite, on obtient l'inégalité demandée.

c) Le membre de gauche de l'inégalité précédente s'écrit

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - S_n'' \right|$$

avec

$$S_n'' = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \sum_{k=1}^q \frac{(2k)! u_{2k}}{n^{2k+1}}$$

Pour $q = 2$,

$$S_n'' = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}$$

On a donc

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - \left(S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5} \right) \right| \leq \frac{120M_5}{n^6}.$$

Si on veut calculer M_5 : Le calcul donne $U_5 = \frac{X^5}{120} - \frac{X^4}{48} + \frac{X^3}{72} - \frac{X}{720}$

$$U_5' = U_4 = \frac{X^4}{24} - \frac{X^3}{12} + \frac{X^2}{24} - \frac{1}{720}$$

Comme $U_4(1-X) = U_4$, on sait que $U_4(\frac{1}{2} + X)$ est pair. Le calcul donne $U_4(\frac{1}{2} + X) = \frac{240X^4 - 120X^2 + 7}{5760}$, polynôme bicarré.

Les carrés des racines de ce polynôme sont $\frac{120 \pm 16\sqrt{30}}{480} = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{\sqrt{30}}$.

On en déduit les variations puis les bornes de la restriction de U_5 à $[0, 1]$.

De pénibles calculs donnent

$$M_5 = \frac{\sqrt{15 + 4\sqrt{\frac{6}{5}}}}{21600}.$$