1. a) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{3n^2+2n+1}$.

Corrigé

La série DIVERGE par comparaison pour les séries à termes positifs car $\dfrac{n+1}{3n^2+2n+1} \sim \dfrac{1}{3n}$.

b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{(n+1)}{2+2^n}$.

Corrigé

La série CONVERGE (ABSOLUMENT) car

$$\left|(-1)^n \frac{(n+1)}{2+2^n}\right| \sim \frac{n}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On peut aussi utiliser le théorème des séries alternées.

c) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n+n}{(\ln n)^n+n^2}$.

Corrigé

La série CONVERGE. En effet

$$\frac{3^n+n}{(\ln n)^n+n^2} \sim \left(\frac{3}{\ln n}\right)^n$$

Ce dernier terme est inférieur à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ à partir d'un certain rang.

d) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Corrigé

La série DIVERGE. En effet

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{CV}} \underbrace{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{DV}}$$

e) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{\mathrm{ch}\,(n)}{\mathrm{sh}\,(n)}\right)$.

Corrigé

La série CONVERGE. En effet

$$\ln\left(\frac{\mathrm{ch}\,(n)}{\mathrm{sh}\,(n)}\right) = \ln\left(\frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}}\right) = \ln(1 + e^{-2n}) - \ln(1 - e^{-2n}) \sim 2(e^{-2})^n$$

On peut utiliser une comparaison pour les séries à termes positifs avec $e^{-2} \in [0, 1[$.

f) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \arctan(n^2) - \arctan(n)$.

Corrigé

La série DIVERGE. En effet

$$\arctan(n^2) - \arctan(n) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

On peut utiliser une comparaison pour les séries à termes positifs.

2. Déterminer $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}$ tels que

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{-3n+12}{n^3-5n^2+6n} = \frac{a}{b}$$

Corrigé

La série est convergente car $\dfrac{-3n+12}{n^3-5n^2+6n} \sim -\dfrac{3}{n^2}$.
On va utiliser un téléscopage. Pour cela, on calcule la décomposition en éléments simples de

$$F(X) = \frac{-3X+12}{X^3-5X^2+6X} = \frac{-3X+12}{X(X-2)(X-3)} = \frac{u}{X} + \frac{v}{X-2} + \frac{w}{X-3}.$$

Les méthodes classiques donnent $u = 2, v = -3$ et $w = 1$. Finalement, pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=4}^{n} \frac{-3k+12}{k^3-5k^2+6k} &= 2\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} - 3\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k-2} + \sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k-3} \\
&= 2\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} - 3\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-3}\frac{1}{k} \\
&= 2\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} \\
&\quad -3\left(\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) \\
&\quad +\left(\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right) \\
&= -\frac{2}{3} + \alpha_n
\end{aligned}$$

où α_n tend vers 0. On en déduit que

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{-3n+12}{n^3-5n^2+6n} = -\frac{2}{3}$$

On a donc $a = -2$ et $b = 3$.

3. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}^{n} \frac{\ln k}{k}$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé

On pose $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$. En calculant $f' : t \mapsto \dfrac{1-\ln t}{t^2}$ on voit que f est décroissante sur $[e, +\infty[\subset [4, +\infty[$. On en déduit, par comparaison série intégrale que pour tout $n \geqslant 4$

$$f(n) + \int_4^n f(t)dt \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant f(4) + \int_4^n f(t)dt$$

Une primitive de f sur $]1, +\infty[$ est $t \mapsto \frac{1}{2}(\ln t)^2$. L'inégalité ci-dessus devient alors

$$\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 4)^2 \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \frac{\ln 4}{4} + \frac{1}{2}(\ln n)^2 - \frac{1}{2}(\ln 4)^2$$

Les deux termes à droite et à gauche sont équivalents à $\frac{1}{2}(\ln n)^2$; le fait de commencer à 4 et pas à 2 ne change rien donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}(\ln n)^2$$