On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

On note a l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer les deux valeurs propres de A. On les notera $\lambda_1 < \lambda_2$

Corrigé

On sait que pour $\lambda \in \mathbf{R}$, λ est une valeur propre si et seulement si $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Or

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

On en déduit que $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$.

2. Déterminer $u_1 = (1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (1, y_2, z_2)$ tels que $E_{\lambda_1}(a) = \mathrm{Vect}(u_1)$ et $E_{\lambda_2}(a) = \mathrm{Vect}(u_2)$.

Corrigé

— Pour $\lambda_1 = -1$, on résout le système donné par la matrice

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elle est visiblement de rang 2 et donc son noyau est de dimension 1. De plus le vecteur $u_1 = (1, 1, 2)$ est solution du système.

— Pour $\lambda_2 = 1$, on résout le système donné par la matrice

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Elle est visiblement de rang 2 et donc son noyau est de dimension 1. De plus le vecteur $u_2 = (1, 0, 1)$ est solution du système.

3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Corrigé

☐ Oui ☑ Non

4. Déterminer le vecteur $u_3 = (x_3, y_3, 1)$ tel que $(a - \mathrm{id})(u_3) = (1, 0, 1)$.

Corrigé

Pour déterminer u_3 on résout le système

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

En faisant (par exemple) les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ on se ramène à résoudre

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit qye $y_3 = -1$. Comme on veut que la dernière coordonnée soit égale à 1 on obtient $x_3 = 1$
Finalement $u_3 = (1, -1, 1)$.

5. Donner la matrice de a dans la base (u_1, u_2, u_3).

Corrigé

Par construction,

$$\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bonus : Soit $n \geqslant 2$. Soit $M \in \mathscr{M}(\mathbf{K})$ une matrice de rang 1. On suppose que $\mathrm{tr}(M) \neq 0$. Justifier que M est diagonalisable.

On pourra utiliser qu'il existe des vecteurs colonnes non nuls $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ tels que $M = XY^\top$.

Corrigé

D'après le théorème du rang, $E_0(M) = \mathrm{Ker}(M)$ est de dimension $n-1$. En particulier 0 est valeur propre de M.
On remarque que si on note $M = XY^\top$ avec $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ non nuls, on a

$$MX = (XY^\top)X = X(Y^\top X) = kX$$

où

$$k = Y^\top X = \sum_{i=1}^{n} Y[i]X[i] = \sum_{i=1}^{n} M[i,i] = \mathrm{tr}(M) \neq 0$$

En particulier, comme $X \neq 0$, $\mathrm{tr}(M)$ est une autre valeur propre de M et $E_{\mathrm{tr}(M)}(M)$ est de dimension au moins 1.
On en déduit que

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda(M)) \geqslant n - 1 + 1 = n$$

Cela montre que M est diagonalisable.