

Exercice I

Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$. On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^{2n+1}$ et on note f sa somme.

1. Déterminer (soigneusement) le rayon de convergence de la série entière. On le notera R .
2. Soit $x \in]-R, R[$ déterminer $f'(x)$.
3. En déduire la valeur de $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice II

On considère $E = \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire canonique

$$\forall (M, N) \in E^2, (M|N) = \text{tr}(M^T N)$$

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

1. Déterminer une base puis une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Calculer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.
3. Calculer la distance de J à F

Exercice bonus

Soit $A \in O_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A[i, j]| \leq n\sqrt{n}$$

2. Montrer que

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A[i, j] \right| \leq n$$