

Exercice I

Dans tout ce problème, α est un réel de l'intervalle $]0, 1[$. On pose

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \qquad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

- 1) Démontrer que $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$
- 2) Démontrer que $J(\alpha) = I(1-\alpha)$

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1}$$

- 3) Montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

- 4) En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$$

Exercice II

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$$

- 1) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence de l'intégrale I_n .
- 2) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} & \text{si } x \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $\int_0^{+\infty} f_n$ tend, quand n tend vers $+\infty$, vers une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

On pourra utiliser le théorème de convergence dominée accompagné d'un argument de concavité.

- 3) Montrer que $\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

On pourra majorer ces intégrales par des intégrales que l'on sait calculer explicitement.

- 4) Conclure quand à la convergence de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.