Soient ℓ, n, p, r quatre entiers strictement positifs. Étant donnée une matrice $A \in \mathscr{M}_{\ell,n}(\mathbb{C})$ et une matrice $B \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{C})$, on définit le produit de Kronecker par la formule :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\ell,1}B & \cdots & a_{\ell,n}B \end{pmatrix}$$

où les $a_{i,j}$ sont les coefficients de A. La matrice $A \otimes B$ appartient à $\mathscr{M}_{\ell p,nr}(\mathbb{C})$.

Partie I

1) Soit $A \in \mathscr{M}_{\ell,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{C})$. Prouver l'équivalence :

$$A \otimes B = 0 \iff (A = 0 \text{ ou } B = 0)$$

2) Prouver que l'application $(A, B) \mapsto A \otimes B$, définie de $\mathscr{M}_{\ell,n}(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{C})$ vers $\mathscr{M}_{\ell p,rn}(\mathbb{C})$, est bilinéaire.
3) On considère $t, v > 0$. Soit $A \in \mathscr{M}_{\ell,n}(\mathbb{C}), B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C}), C \in \mathscr{M}_{r,t}(\mathbb{C})$ et $D \in \mathscr{M}_{t,v}(\mathbb{C})$. Montrer :

$$(A \otimes C) \times (B \otimes D) = (A \times B) \otimes (C \times D)$$

4) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $C \in GL_p(\mathbb{C})$. Montrer que $A \otimes C \in GL_{np}(\mathbb{C})$ et préciser son inverse.
5) Application numérique : montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.
6) Soit $A \in \mathscr{M}_{\ell,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{C})$. On considère $A' \in \mathscr{M}_{\ell,n}(\mathbb{C})$ et $B' \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{C})$. Montrer que si A est équivalente (resp. semblable) à A' et B est équivalente (resp. semblable) à B' alors $A \otimes B$ est équivalente (resp. semblable) à $A' \otimes B'$

Partie II

On fixe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.

7) Supposons A, B diagonalisables. Montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable.
8) Application numérique : diagonaliser

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

9) Donner un exemple où $A \otimes B$ est diagonalisable mais A ne l'est pas.
10) On note $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, $\chi_B(X) = \prod_{j=1}^{p}(X - \mu_j)$.
Prouver que le polynôme caractéristique de $A \otimes B$ est

$$\chi_{A\otimes B}(X) = \prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} (X - \lambda_i \mu_j),$$

En déduire que si $A \otimes B$ est inversible, A et B le sont.

11) Montrer que pour U vecteur propre de A, le sous-espace $E(U) = \{U \otimes V ; V \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})\}$ est stable par $A \otimes B$.

12) Prouver que $V \mapsto U \otimes V$ est un isomorphisme de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ vers $E(U)$.

13) Supposons $A \otimes B$ diagonalisable et A admettant une valeur propre non nulle. Prouver que B est diagonalisable.

    On pourra admettre qu'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est encore diagonalisable.

14) Supposons $A \otimes B$ diagonalisable et non nul. Prouver que A et B sont diagonalisables.

15) Quelles sont les matrices $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ telles que

$$\begin{pmatrix} B & B \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable ?