

Exercice

- 1) a) Par intégration par parties (les applications en questions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2, x]$ si $x > 0$) :

$$\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \left[\frac{t}{\ln t} \right]_2^x - \int_2^x t \cdot \left(-\frac{1}{t} \right) \frac{1}{(\ln t)^2} dt = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + R_0(x) \text{ avec } R(x) = \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2} dt.$$

On pose donc $\boxed{g_0 = t \mapsto \frac{1}{(\ln t)^2}} \text{ et } \boxed{c_0 = -\frac{2}{\ln 2}}.$

b) $\frac{1}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{\ln x} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{\ln(x)} \right).$

Or $\frac{1}{x} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{\ln(x)} \right)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction non intégrable sur $[2, +\infty[$, donc il en est de même de $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ (les fonctions sont continues et positives).

Ainsi, par la propriété d'intégration des relations de comparaison (cas des intégrales divergentes de fonctions positives) $R_0(x) = \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2} dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt \right).$

c) Comme $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ est positive et non intégrable, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = +\infty$,

donc $-\frac{2}{\ln 2} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt \right).$

Ainsi, par les deux questions précédentes, $\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{x}{\ln x} + \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt \right).$

Finalement : $\boxed{\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}}.$

- 2) a) On réintègre par parties $\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}$; les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2} dt &= \left[\frac{t}{(\ln t)^2} \right]_2^x - \int_2^x t \left(-\frac{1}{t} \right) \frac{2}{(\ln t)^3} dt \\ &= \frac{x}{(\ln x)^2} - \frac{2}{(\ln 2)^2} + \int_2^x \frac{2}{(\ln t)^3} dt \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_1^x \frac{1}{\ln t} dt = \sum_{k=0}^1 \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + c_1 + R_1(x)$$

où $c_1 = -\frac{2}{\ln 2} - \frac{2}{(\ln 2)^2}$ et $R_1(x) = \int_1^x g_1(t) dt$ avec $g_1 : t \mapsto \frac{2}{(\ln t)^3} dt$.

Procédons donc par récurrence. On pose pour tout entier n , le prédicat $\mathcal{P}(n)$ suivant :

$$\mathcal{P}(n) : \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln(x))^{k+1}} + c_n + \int_2^x g_n(t) dt \text{ où } g_n : t \mapsto \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}} \text{ et } c_n = -\frac{2}{\ln 2} - \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}.$$

- Initialisation. Le cas $k = 0$ a été fait à la question 1.a ; le cas $k = 1$ ci-dessus.

- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\mathcal{P}(n-1)$ et on veut montrer $\mathcal{P}(n)$.

On procède encore à une intégration par partie de $R_{n-1}(x)$:

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{n!}{(\ln t)^{n+1}} dt &= \left[\frac{n! \cdot t}{(\ln t)^{n+1}} \right]_2^x - \int_2^x n! \cdot t \cdot \left(-\frac{1}{t} \right) \frac{n+1}{(\ln t)^{n+2}} dt \\ &= \frac{n! \cdot x}{(\ln x)^{n+1}} - \frac{n! \cdot 2}{(\ln 2)^{n+1}} + \int_2^x \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}} dt \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!x}{(\ln(x))^{k+1}} + c_{n-1} + \int_2^x \frac{n!}{(\ln t)^{n+1}} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!x}{(\ln(x))^{k+1}} + c_{n-1} + \frac{n! \cdot x}{(\ln x)^{n+1}} - \frac{n! \cdot 2}{(\ln 2)^{n+1}} + \int_2^x \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln(x))^{k+1}} + c_n + \int_2^x g_n(t) dt \end{aligned}$$

où

$$c_n = c_{n-1} - \frac{n! \cdot 2}{(\ln 2)^{n+1}} = -2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}} - \frac{n! \cdot 2}{(\ln 2)^{n+1}} = -2 \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln 2)^{k+1}}$$

et

$$g_n : t \mapsto \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}}$$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

b) On procède exactement comme en 1.b) :

$$\frac{1}{(\ln x)^{n+3}} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{(\ln x)^{n+2}} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{(\ln x)^{n+2}} \right).$$

Or $\frac{1}{x} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{(\ln x)^{n+2}} \right)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction non intégrable sur $[2, +\infty[$, donc

il en est de même de $x \mapsto \frac{1}{(\ln x)^{n+2}}$ (les fonctions sont continues et positives).

Ainsi, par la propriété intégration des relations de comparaison (cas des intégrales divergentes de fonctions positives) $\int_2^x \frac{1}{(\ln t)^{n+3}} dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\int_2^x \frac{1}{(\ln t)^{n+2}} dt \right)$.

Comme $(n+1)!$ et $(n+2)!$ sont constantes, $\boxed{R_{n+1}(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(R_n(x))}$

c) En reprenant l'intégration par parties faite dans l'hérédité de la récurrence de la question 2.a) (et en décalant de 1 les indices) :

$$R_n(x) = \int_2^x \frac{(n+1)!}{(\ln t)^{n+2}} dt = \frac{(n+1)! \cdot x}{(\ln x)^{n+2}} - \frac{(n+1)! \cdot 2}{(\ln 2)^{n+2}} + R_{n+1}(x)$$

On a vu que $R_{n+1}(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(R_n(x))$, de plus $\frac{(n+1)! \cdot 2}{(\ln 2)^{n+2}}$ est une constante alors que $R_n(x)$

tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ car $\frac{1}{t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{(\ln t)^{n+2}} \right)$ donc $\boxed{R_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(n+1)! \cdot x}{(\ln x)^{n+2}}}$

d) On en déduit que $R_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(n+1)! \cdot x}{(\ln x)^{n+2}} = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}} \right)$.

Finalement :

$$\int_2^x \frac{1}{\ln t} dt = \sum_{k=0}^n \frac{k!x}{(\ln x)^{k+1}} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}} \right)$$

Problème

Partie I

- 1) a) Soit p un projecteur, on sait que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. De plus comme $\text{rg}(p) = r$ alors $\text{Im}(p)$ est de dimension r . On considère une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\text{Im}(p)$ et une base $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\text{Ker}(p)$ (qui est de dimension $n - r$ d'après le théorème du rang) et que l'on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la famille obtenue en concaténant ces deux bases. On sait que $\mathcal{B}$ est une base de E . De plus,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

en effet pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $p(e_i) = e_i$ car $e_i \in \text{Im}(p)$ et pour tout $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$, $p(e_i) = 0$ car $e_i \in \text{Ker}(p)$.

- b) On en déduit que $\boxed{\text{tr}(p) = r}$.

- 2) a) Soient u et v deux endomorphismes de E . On veut montrer que $\text{Im}(u+v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$. Soit $z \in \text{Im}(u+v)$, par définition, il existe $x \in E$ tel que $z = (u+v)(x) = u(x) + v(x)$. Or $u(x) \in \text{Im}(u)$ et $v(x) \in \text{Im}(v)$ donc $z \in \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$. On en déduit que

$$\text{rg}(u+v) = \dim(\text{Im}(u+v)) \leq \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) \leq \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v)) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

- b) Soient $\pi_1, \dots, \pi_k$ des projecteurs de E .

On sait que l'application tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$. De ce fait,

$$\text{tr}(\pi_1 + \dots + \pi_k) = \text{tr}(\pi_1) + \dots + \text{tr}(\pi_k) = \text{rg}(\pi_1) + \dots + \text{rg}(\pi_k).$$

Comme pour tout entier i compris entre 1 et k , $\text{rg}(\pi_i)$ est un entier, on obtient que $\text{tr}(\pi_1 + \dots + \pi_k)$ est un entier. De plus, en utilisant la question précédente,

$$\text{rg}(\pi_1 + \dots + \pi_k) \leq \text{rg}(\pi_1 + \dots + \pi_{k-1}) + \text{rg}(\pi_k) \leq \dots \leq \text{rg}(\pi_1) + \dots + \text{rg}(\pi_k).$$

Finalement $\boxed{\text{tr}(\pi_1 + \dots + \pi_k) \geq \text{rg}(\pi_1 + \dots + \pi_k)}$.

Partie II

- 3) On a $(CL)^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = CL$ car $LC = (1)$. Donc $\boxed{CL \text{ est idempotente}}$.

De plus, $\text{Im}(CL) \subset \text{Im}(C)$ qui est de dimension 1 donc $\text{rg}(CL) \in \{0, 1\}$. De plus, comme LC n'est pas nul, L n'est pas la matrice nulle. Comme $LCL = L$ pour la même raison que ci-dessus, on obtient que CL n'est pas nulle. Finalement $\boxed{\text{le rang de } CL \text{ vaut } 1}$.

- 4) a) On a $\text{tr}(M) = -3 + 6 = 3$ et $\text{rg}(M) = 2$ car $\det(M) = -25 \neq 0$.

- b) Par calcul $X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc la famille (X_1, X_2) est libre.

- c) On a $P = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\boxed{M' = \begin{pmatrix} 1 & 27 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$

d) On a $M'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $(M'_1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice M'_1 est bien idempotente.

On a alors $M'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 27 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Il suffit de poser $M'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 27 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet on vérifie facilement que M'_3 et M'_4 sont idempotentes et que $M'_2 = M'_3 + M'_4$.

e) On a $M' = M'_1 + M'_3 + M'_4$ donc $M = PM'P^{-1} = M_1 + M_3 + M_4$ où pour tout $i \in \{1, 3, 4\}$ on pose $M_i = PM'_iP^{-1}$. De plus les matrices M_i sont idempotentes car pour tout i dans $\{1, 3, 4\}$, $M_i^2 = P(M'_i)^2P^{-1} = PM'_iP^{-1} = M_i$.

5) a) Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $v(e_i) \in \text{Vect}(e_i)$ donc il existe λ_i tel que $v(e_i) = \lambda_i e_i$. On en déduit que

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

b) Soit i et j dans $\llbracket 1, r \rrbracket$ avec $i \neq j$, on a $v(e_i + e_j) = v(e_i) + v(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$. Cependant, on sait que $v(e_i + e_j) \in \text{Vect}(e_i + e_j)$ donc il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $v(e_i + e_j) = \mu(e_i + e_j)$. On en déduit que $(\lambda_i - \mu)e_i + (\lambda_j - \mu)e_j = 0$ et comme la famille (e_i, e_j) est libre comme sous-famille d'une base, $\lambda_i = \mu = \lambda_j$.

Finalement, tous les coefficients diagonaux de D sont identiques.

c) On en déduit que D est scalaire et donc v est une homothétie.

6) a) Soit λ, μ deux réels tels que $\lambda e + \mu(v(e) - e) = 0$. On a alors $(\lambda - \mu)e + \mu v(e) = 0$. Or $e \neq 0$ et $v(e) \notin \text{Vect}(e)$ donc $(e, v(e))$ est une famille libre. On en déduit que $\mu = 0$ puis que $\lambda = 0$.

On a bien montré que $(e, v(e) - e)$ est libre.

b) La famille $(e, v(e) - e)$ étant libre, on peut la compléter en une base $\mathcal{C}$ de E . Par définition, $v(e) = 1e + 1(v(e) - e)$. De ce fait, le coefficient de la première ligne et première colonne de la matrice de v dans la base $\mathcal{C}$ vaut 1.

7) a) Comme u est de rang r , le noyau de u est de dimension $n - r$. Considérons $(e_1, \dots, e_{n-r})$ une base de $\text{Ker}(u)$. On peut compléter cette famille (qui est libre) en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de F . Par définition, pour tout $i \in \llbracket 1, n - r \rrbracket$, $u(e_i) = 0$ donc la matrice de u dans cette base est de la forme.

$$M = \begin{pmatrix} O & B \\ O & A \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$.

b) On suppose A n'est pas de la forme λI_r avec $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après la question 6. la matrice A est semblable à une matrice A' dont le coefficient de la première ligne et première colonne vaut 1. Précisément, il existe une matrice $P \in \text{GL}_r(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$. Posons alors $Q = \begin{pmatrix} I_{n-r} & O \\ O & P \end{pmatrix}$. C'est une matrice inversible et $Q^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n-r} & O \\ O & P^{-1} \end{pmatrix}$ et

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} I_{n-r} & O \\ O & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & B \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-r} & O \\ O & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & BP \\ O & P^{-1}AP \end{pmatrix}$$

C'est la forme désirée en posant $B' = BP$.

c) On suppose que $A = \lambda I_r$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

On remarque que $M = M'' + Z$ où M'' est la matrice de l'énoncé et Z la matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 0 sauf le coefficient à la ligne $n - r + 1$ et la colonne $n - r + 1$ qui vaut 1. Il est clair de plus que Z est idempotente et de rang 1.

d) On trouve une base comme dans la question 7.a.

- Si on est dans le cas où A n'est pas scalaire (cas de la question 7.b), on sait qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ soit de la forme $M' = \begin{pmatrix} O & B' \\ O & A' \end{pmatrix}$ avec $A' \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et $B' \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et le coefficient à la première ligne et première colonne de A' vaut 1. On peut alors poser $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice entièrement composée de zéros sauf la $n - r + 1$ -ème colonne qui est égale à la $n - r + 1$ -ème colonne de M' . On note alors N la matrice obtenue à partir de M' en remplaçant la $n - r + 1$ -ième colonne par une colonne de zéros de telle sorte que $M' = N + T$. Maintenant, la matrice $T = CL$ où $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la $n - r + 1$ -ème colonne de M' et $L = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 est en position $n - r + 1$. De plus, comme le coefficient de la $n - r + 1$ -ième ligne de C vaut 1 d'après 7.b, $LC = (1)$. En utilisant 3. on obtient que T est idempotente de rang 1.

On pose p et w les endomorphismes de E tels que leur matrice dans la base $\mathcal{B}'$ soit respectivement T et N . Alors, p est bien un projecteur de rang 1. De plus, $\text{tr}(w) = \text{tr}(N) = \text{tr}(u) - 1$ est bien entière et strictement inférieure à $\text{tr}(u)$. Pour finir, la matrice N a $n - r + 1$ colonnes de 0 donc $\text{rg}(w) \leq r - 1 \leq \text{tr}(u) - 1 = \text{tr}(w)$.

- Si on est dans le cas où A est scalaire (cas de la question 7.c), on sait qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit de la forme $M = \begin{pmatrix} O & B \\ O & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$. Si $A = I_r$ alors en élevant au carré, $M^2 = M$ donc u est un projecteur, on peut prendre $w = 0$.

Sinon, d'après 7.c, on peut écrire $M = Z + M''$. Si on note p_1 et v les endomorphismes dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont Z et M'' , on sait que p_1 est un projecteur de rang 1 et on peut appliquer ce qui précède à v car cette fois on sera dans le cas de la question 7.b et que $\text{tr}(v) = \text{tr}(u) - 1 \leq \text{tr}(u) \leq \text{rg}(u) = \text{rg}(v)$. On en déduit que $u = p_1 + p + w$ où $\text{tr}(w) = \text{tr}(u) - 2$, or par hypothèse, $\text{tr}(u) \geq r$ et $\text{tr}(u) \neq r$ car on a exclu le cas où $A = I_r$ donc $\text{tr}(u) \geq r + 1$. Donc $\text{tr}(w) = \text{tr}(u) - 2 \geq r - 1 = \text{rg}(w)$.

Dans tous les cas, u est somme d'un ou deux projecteurs et d'un endomorphisme w dont la trace est entière, strictement inférieure à celle de u , et supérieure ou égale au rang de w .

- e) Il suffit de réitérer le procédé ci-dessus jusqu'à ce que la trace de l'endomorphisme considéré soit nulle, ce qui implique que son rang est aussi nul.

Partie III

- 8) a) Par la question 2)a) (étendue à plus de 2 termes),

$$E = \text{Im}(\text{id}_E) \subset \text{Im}(\pi_1) + \dots + \text{Im}(\pi_p) = E_1 + \dots + E_p$$

- b) Si $p = 2$, $\pi_2 = \text{id}_E - \pi_1$ est le projecteur sur $\text{Ker}(\pi_1)$ parallèlement à $\text{Im}(\pi_1)$. Donc $\text{Im}(\pi_2) = \text{Ker}(\pi_1)$.

Comme π_1 est un projecteur,

$$E = \text{Im}(\pi_1) \oplus \text{Ker}(\pi_1) = E_1 \oplus E_2$$

- c) Par linéarité de la trace, on a

$$\dim(E) = \text{tr}(\text{id}_E) = \text{tr}(\pi_1) + \dots + \text{tr}(\pi_p)$$

Par la question 1)b), on a donc :

$$\dim(E) = \text{rg}(\pi_1) + \dots + \text{rg}(\pi_p) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_p)$$

Par la question 8)a) on a ainsi

$$\dim(E_1 + \dots + E_p) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_p)$$

D'après le cours, ceci implique que $E_1, \dots, E_p$ sont en somme directe.

Ainsi

$$\boxed{E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p}$$

- 9) a) E n'est pas vide car il contient $O_{\mathbb{K}(X)} = \frac{0_{\mathbb{K}[X]}}{X^0}$.

Soient F, G des éléments de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe alors $m, n \in \mathbb{N}$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$F = \frac{P}{X^m} \text{ et } G = \frac{Q}{X^n}$$

.

$$\lambda F + G = \frac{\lambda X^n P + X^m Q}{X^{m+n}} \in E$$

car $\lambda X^n P + X^m Q \in \mathbb{K}[X]$ et $m+n \in \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}(X)}$.

- b) Pour tout $n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$, $X^n = \frac{X^n}{X^0}$ appartient à E et pour tout $n \in -\mathbb{N} = \mathbb{Z}^-$, $X^n = \frac{1}{X^{-n}} \in E$.

Soit $F \in E$. Il existe $p, q \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_p \in K$ tels que :

$$F = \frac{a_0 + \dots + a_p X^p}{X^q} = a_0 X^{-q} + a_1 X^{1-q} + \dots + a_p X^{p-q}$$

Donc $(X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ engendre E .

Soit I une partie finie de $\mathbb{Z}$ et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que

$$0_E = \sum_{i \in I} \lambda_i X^i = \sum_{i \in I \cap \mathbb{N}} \lambda_i X^i + \sum_{i \in I \cap (-\mathbb{N}^*)} \lambda_i \frac{1}{X^{-i}}$$

Par unicité de la décomposition en éléments simples de la fraction nulle, tous les λ_i sont nuls.

Donc $(X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre puisque toutes ses sous-familles finies sont libres. [On pouvait aussi raisonner avec des familles de scalaires à support fini plutôt qu'avec des sous-familles finies de vecteurs].

Donc $\boxed{(X^n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ est une base de } E}$.

- 10) L'application u est linéaire par linéarité de la dérivation et bilinéarité de la multiplication dans $\mathbb{K}(X)$.

De plus u est à valeurs dans E car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u(X^k) = kX^k \in E$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ engendre E .

Donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E}$.

- 11) Comme u est linéaire,

$$u(A_n) = \text{Vect}\left(u(X^{-n}), u(X^{n+2})\right) = \text{Vect}\left(-nX^{-n}, (n+2)X^{n+2}\right) \subset A_n$$

Donc $\boxed{A_n \text{ est stable par } u}$.

- 12) On sait que (X^{-n}, X^{n+2}) est une base de A_n . De plus, la matrice de u_n dans cette base est $\begin{pmatrix} -n & 0 \\ 0 & n+2 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\text{tr}(u_n) = -n + n + 2 = \boxed{2}$.
- 13) Le rang de u_n est au plus égal à $\dim(A_n) = 2$ et sa trace est un entier égal à 2, donc u_n est somme de projecteurs. Plus précisément, u_n est somme d'au plus 2 projecteurs non nuls (car la trace d'un projecteur non nul vaut au moins un). Donc $\boxed{u_n \text{ est somme de deux projecteurs}}$.
- 14) Soit p l'unique application linéaire de E dans lui-même transformant la base $(X^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ en la famille $(F_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$F_k = \begin{cases} X & \text{si } k = 1 \\ p_{-k}(F_k) & \text{si } k \leq 0 \\ p_{k-2}(F_k) & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

Alors p est l'unique endomorphisme de E satisfaisant les conditions de l'énoncé.

Idem mutatis mutandis pour q .

- 15) Pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ on a $p^2(X^k) = p_n^2(X^k) = p_n(X^k) = p(X^k)$, où n est l'unique entier naturel tel que $X^k \in A_n$, défini comme à la question précédente. De plus $p^2(X) = p(X) = X$.
Donc $p^2 = p$ car p^2 et p sont deux endomorphismes de E qui coïncident sur une base de E .

Donc $\boxed{p \text{ est un projecteur}}$.

Idem pour q .

Les endomorphismes $p+q$ et u coïncident sur $\text{Vect}(X)$ et sur chacun des A_n (car $p-n+q_n = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Donc $p+q$ et u coïncident sur la base $(X^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de E . Étant linéaires, elles coïncident sur E . Ainsi $\boxed{p+q = u}$.

- 16) L'application $\boxed{s \text{ est linéaire}}$ par linéarité à droite de la composition formelle par $1/X$ (qui est bien définie sur $\mathbb{K}(X)$ car pour Q polynôme non nul, $Q(1/X)$ n'est pas la fraction nulle car son degré est $-d^o(Q) \neq -\infty$).

De plus, $s(E) = \text{Vect}(s(X^k))_{k \in \mathbb{Z}} = \text{Vect}(X^{-k})_{k \in \mathbb{Z}} = E \subset E$ donc $\boxed{E \text{ est stable par } s}$.

Pour tout $F \in E$, $u(s(F)) = u(F(1/X)) = X(F(1/X))' = X \frac{-1}{X^2} F'(1/X) = -\frac{1}{X} F'(1/X) = -s(u(F))$. Donc $\boxed{u \circ s = -s \circ u}$.

- 17) Comme $s^2 = \text{id}_E$, on a

$$(s \circ p \circ s)^2 = s \circ p \circ s^2 \circ p \circ s = s \circ p \circ \text{id}_E \circ s = s \circ p \circ s$$

donc $\boxed{s \circ p \circ s \text{ est un projecteur}}$. Idem pour $s \circ q \circ s$.

$$\check{p} + q = s \circ (p + q) \circ s = s \circ u \circ s = -u \circ s \circ s = \boxed{-u}$$

- 18)

$$\text{id}_E = \text{id}_E + u - u = \boxed{\text{id}_E + p + q + \check{p} + \check{q}}$$

Chaque terme de cette somme est un projecteur, et comme $\text{Im}(\text{id}_E) \cap \text{Im}(p) = \text{Im}(p) \ni X \neq 0_E$, les images de ces projecteurs $\boxed{\text{ne sont pas en somme directe}}$.