Suites	de fonctions
1.1	Limites et continuité
1.2	Dérivation et intégration
Séries	de fonctions
2.1	Limite et continuité
2.2	Intégration et dérivation
	1.1 1.2 <b>Séries</b> 2.1

## 1. Suites de fonctions

#### 1.1 Limites et continuité

### Théorème 1.1 (Continuité)

Soit  $(f_n) \in (\mathscr{F}(X, \mathbf{K}))^{\mathbb{N}}$  une suite de fonctions définie sur X et  $f \in \mathscr{F}(X, \mathbf{K})$ . Soit  $a \in X$ .

On suppose que

- i) pour tout entier n,  $f_n$  est continue en a,
- ii) la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers f sur X

Alors, la fonction f est continue en a.

## Corollaire 1.2 (Continuité avec convergence uniforme locale)

Soit  $(f_n) \in (\mathscr{F}(X, \mathbf{K}))^{\mathbb{N}}$  une suite de fonctions définie sur X et  $f \in \mathscr{F}(X, \mathbf{K})$ . On suppose que

- i) pour tout entier n,  $f_n$  est continue,
- *ii*) pour tout a de X il existe un voisinage  $V_a$  tel que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $V_a$  vers f.

Alors, la fonction f est continue sur X.

## **Théorème 1.3** (Double limite pour les suite de fonctions)

Soit  $(f_n) \in (\mathscr{F}(X, \mathbf{K}))^{\mathbb{N}}$  une suite de fonctions définie sur X et  $f \in \mathscr{F}(X, \mathbf{K})$ . Soit a un point adhérent à X.

On suppose que

- i) pour tout n,  $f_n$  admet en a une limite finie  $\ell_n \in K$ .
- ii) La suite de fonctions converge uniformément vers f au voisinage de a

Alors la suite  $(\ell_n)$  converge (vers  $\ell$ ) et  $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ . C'est-à-dire :

$$\lim_{x \to a} \left( \lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left( \lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

**Remarque :** Dans le cas ou  $A \subset \mathbb{R}$ . S'il n'est pas majoré (resp. minoré) on peut prendre  $a = +\infty$  (resp.  $a = -\infty$ ).

## 1.2 Dérivation et intégration

### Proposition 1.4 (Intégration)

Soit *I* un intervalle.

Soit  $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$  une suite de fonctions définie sur I et  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbf{K})$ .

On suppose que

- i) Pour tout entier n,  $f_n$  est continue
- ii) La suite de fonctions converge uniformément vers f sur tout segment J vers S.

Soit a un élément de I, on pose  $F_n: x \mapsto \int_a^x f_n$  la primitive de  $f_n$  qui s'annule en a et  $F: x \mapsto \int_a^x f$  la primitive de f qui s'annule en a.

Alors la suite  $(F_n)$  converge uniformément sur tout segment J de I vers F.

### Corollaire 1.5 (Intégration sur un segment)

Soit [a, b] un segment

Soit  $(f_n) \in \mathcal{F}([a,b], K)$  une suite de fonctions définie sur [a,b] et  $f \in \mathcal{F}([a,b], K)$ .

On suppose que

- i) Pour tout entier n,  $f_n$  est continue
- ii) La suite de fonctions converge uniformément vers f sur le segment [a, b].

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{a}^{b} f_{n} = \int_{a}^{b} f$$

## Théorème 1.6 (Dérivation termes à termes)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans K. On suppose que

- i) Pour tout entier n, la fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur I.
- *ii*) La suite de fonctions  $(f_n)$  converge (simplement) vers une fonction f.
- iii) La suite des fonctions dérivées  $(f'_n)$  converge **uniformément** sur tout segment J de I vers une fonction g.

Alors

- la fonction f est de classe  $\mathscr{C}^1$  et f' = g.
- $-\,$ la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout segment J vers f

## **Corollaire 1.7** (Caractère $\mathscr{C}^k$ )

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans K. Soit k un entier. On suppose que

- i) Pour tout entier n, la fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur I.
- *ii*) Pour tout  $i \in [[0; k-1]]$ , la suite de fonctions  $(f_n^{(i)})$  converge (simplement) vers une fonction  $g_i$
- iii) La suite des fonctions dérivées k-ième  $(f_n^{(k)})$  converge **uniformément** sur tout segment J de I vers une fonction  $g_k$ .

On pose  $f = g_0$ . Alors

- $-\ f$  est de classe  $\mathscr{C}^k$
- pour tout  $i \in [[0; k]], f^{(i)} = g_i$

On peut généraliser pour les fonctions de classe  $\mathscr{C}^{\infty}$ .

## Corollaire 1.8 (Caractère $\mathscr{C}^{\infty}$ )

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans K. On suppose que

- i) Pour tout entier n, la fonction  $f_n$  est de classe  $\mathscr{C}^{\infty}$  sur I.
- *ii*) Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , la suite de fonctions  $(f_n^{(i)})$  converge (simplement) vers une fonction  $g_i$
- *iii*) Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , la suite des fonctions dérivées i-ième  $(f_n^{(i)})$  converge **uniformément** sur tout segment J de I vers la fonction  $g_i$ .

On pose  $f = g_0$ . Alors :

- -f est de classe  $\mathscr{C}^{\infty}$
- pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(i)} = g_i$

## 2. Séries de fonctions

Nous allons réécrire les résultats démontrés précédemment sur les suites de fonctions dans le cadre des séries de fonctions.

#### 2.1 Limite et continuité

### Théorème 2.9 (Continuité)

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définie sur A. Soit  $a \in A$ . On suppose que

- i) pour tout entier n,  $f_n$  est continue en a,
- ii) la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément

On note  $S: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  la limite de la série. Alors

## Corollaire 2.10 (Continuité avec convergence uniforme locale)

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définie sur A.

On suppose que

- i) pour tout entier n,  $f_n$  est continue,
- *ii*) pour tout a de A il existe un voisinage  $V_a$  tel que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $V_a$ .

On note  $S: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  la limite de la série.

Alors

Théorème 2.11 (Double limite pour les séries de fonctions)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur $A$ et $a$ un point adhérent à $A$ . On suppose que
i) La série de fonctions converge uniformément vers $S$ au voisinage de $a$
ii) pour tout $n, f_n$ admet en $a$ une limite finie $\ell_n \in \mathbf{K}$ .
Alors
_
_
C'est-à-dire

**Remarque :** Dans le cas ou  $A \subset \mathbb{R}$ . S'il n'est pas majoré (resp. minoré) on peut prendre  $a = +\infty$  (resp.  $a = -\infty$ ).

## 2.2 Intégration et dérivation

### **Proposition 2.12**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans K. On suppose que

- *i*) Pour tout entier n,  $f_n$  est continue
- *ii*) La série de fonctions converge uniformément sur tout segment J vers S. La limite de la série de fonctions est la fonction  $S: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ .

Pour tout a de I on pose  $F_n: x \mapsto \int_a^x f_n$  la primitive de  $f_n$  qui s'annule en a.

Alors la série de fonctions  $\sum F_n$  converge uniformément sur tout segment J de I vers la fonction  $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} S$ . C'est-à-dire,

$$\forall x \in I, \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{a}^{x} f_{n} = \int_{a}^{x} \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n}$$

### Théorème 2.13 (Intégration sur un segment)

Soit [a, b] un segment

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définie sur [a, b].

On suppose que

- i) Pour tout entier n,  $f_n$  est continue
- ii) La série de fonctions converge uniformément sur le segment [a,b]. La limite de la série de fonctions est la fonction  $S: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ .

— <b>Théorème 2.14</b> (Dérivati	on termes à termes)	
	ns définies sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $K$ .	
<i>i)</i> Pour tout entier $n$ , $f_n$ e	st de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$	
	nverge (simplement) vers $S$ sur $I$ ,	
m la serie de fonctions de fonction $T$	s dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment $J$ vers un	e
Alors:		
_		
_		
_		
Corollaire 2.15 (Caractèr	e $\mathscr{C}^k)$	
	e $\mathscr{C}^k$ )  ns définies sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $\mathbf{K}$ et $k \in \mathbf{N}$ . On	
Soit $\sum f_n$ une série de fonction	ns définies sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $\mathbf{K}$ et $k \in \mathbf{N}$ . On	
Soit $\sum f_n$ une série de fonction suppose que i) Pour tout entier $n$ , $f_n$ e ii) pour $i < k$ les séries de	ns définies sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $K$ et $k \in \mathbb{N}$ . On st de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ , fonctions $\sum f_n^{(i)}$ convergent (simplement) vers $S_i$ sur $I$ ,	
Soit $\sum f_n$ une série de fonction suppose que i) Pour tout entier $n$ , $f_n$ e ii) pour $i < k$ les séries de	ns définies sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $\mathbf{K}$ et $k \in \mathbf{N}$ . On st de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ ,	
Soit $\sum f_n$ une série de fonction suppose que i) Pour tout entier $n$ , $f_n$ e ii) pour $i < k$ les séries de iii) la série de fonctions de	ns définies sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $K$ et $k \in \mathbb{N}$ . On st de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ , fonctions $\sum f_n^{(i)}$ convergent (simplement) vers $S_i$ sur $I$ ,	
Soit $\sum f_n$ une série de fonction suppose que  i) Pour tout entier $n$ , $f_n$ e  ii) pour $i < k$ les séries de  iii) la série de fonctions de $J$ vers $S_k$	ns définies sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $K$ et $k \in \mathbb{N}$ . On st de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ , fonctions $\sum f_n^{(i)}$ convergent (simplement) vers $S_i$ sur $I$ ,	
Soit $\sum f_n$ une série de fonction suppose que  i) Pour tout entier $n$ , $f_n$ e  ii) pour $i < k$ les séries de  iii) la série de fonctions de $J$ vers $S_k$	ns définies sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $K$ et $k \in \mathbb{N}$ . On st de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ , fonctions $\sum f_n^{(i)}$ convergent (simplement) vers $S_i$ sur $I$ ,	
Soit $\sum f_n$ une série de fonction suppose que  i) Pour tout entier $n$ , $f_n$ e  ii) pour $i < k$ les séries de  iii) la série de fonctions de $J$ vers $S_k$	ns définies sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $K$ et $k \in \mathbb{N}$ . On st de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ , fonctions $\sum f_n^{(i)}$ convergent (simplement) vers $S_i$ sur $I$ ,	
Soit $\sum f_n$ une série de fonction suppose que  i) Pour tout entier $n$ , $f_n$ e  ii) pour $i < k$ les séries de  iii) la série de fonctions de $J$ vers $S_k$	ns définies sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $K$ et $k \in \mathbb{N}$ . On st de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ , fonctions $\sum f_n^{(i)}$ convergent (simplement) vers $S_i$ sur $I$ ,	
Soit $\sum f_n$ une série de fonction suppose que  i) Pour tout entier $n$ , $f_n$ e  ii) pour $i < k$ les séries de  iii) la série de fonctions de $J$ vers $S_k$	ns définies sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $K$ et $k \in \mathbb{N}$ . On st de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ , fonctions $\sum f_n^{(i)}$ convergent (simplement) vers $S_i$ sur $I$ ,	
Soit $\sum f_n$ une série de fonction suppose que  i) Pour tout entier $n$ , $f_n$ e  ii) pour $i < k$ les séries de  iii) la série de fonctions de $J$ vers $S_k$	ns définies sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $K$ et $k \in \mathbb{N}$ . On st de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ , fonctions $\sum f_n^{(i)}$ convergent (simplement) vers $S_i$ sur $I$ ,	
Soit $\sum f_n$ une série de fonction suppose que  i) Pour tout entier $n$ , $f_n$ e  ii) pour $i < k$ les séries de  iii) la série de fonctions de $J$ vers $S_k$	ns définies sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $K$ et $k \in \mathbb{N}$ . On st de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$ , fonctions $\sum f_n^{(i)}$ convergent (simplement) vers $S_i$ sur $I$ ,	

# **Corollaire 2.16** (Caractère $\mathscr{C}^{\infty}$ )

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans  ${\bf K}.$  On suppose que

- i) Pour tout entier  $n, f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur I,
- ii) pour tout entier i, les séries de fonctions  $\sum f_n^{(i)}$  convergent (simplement) vers  $S_i$  sur I,
- iii) pour tout entier i, les séries de fonctions des dérivées i-ième  $\sum f_n^{(i)}$  convergent uniformément sur tout segment J

Alors:

\_