

1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

Corrigé

a) $\int_0^1 \ln(t) dt$	☒ Converge	☐ Diverge
b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)} dt$	☒ Converge	☐ Diverge
c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t) dt$	☐ Converge	☒ Diverge
d) $\int_0^{+\infty} (t^2 + 1)t^{-2} dt$	☐ Converge	☒ Diverge
e) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^3 - t^2}}$	☐ Converge	☒ Diverge
f) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t} \ln(t)} dt$	☐ Converge	☒ Diverge

— a) vu en cours

— b) la fonction est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ en 0 et à $\frac{1}{t\sqrt{t}}$ en $+\infty$.

— c) on se ramène en 0 en posant $t = \frac{\pi}{2} - u$ et on étudie $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sin(u)} du$. Cette intégrale diverge car $\frac{\cos(u)}{\sin(u)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{u}$.

— d) la fonction est équivalente à $\frac{1}{t^2}$ en 0.

— e) la fonction est équivalente à $\frac{2}{t}$ en $+\infty$.

— f) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t} \ln(t)}$ est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}]$ car elle est négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Par contre, pour étudier au voisinage de 1^- on pose $t = 1 - h$ et on se ramène à considérer $\frac{1}{\sqrt{1-h} \ln(1-h)} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{h}$. On en déduit que l'intégrale diverge par comparaison pour les fonctions positives.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$.

(a) Justifier que l'intégrale est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$. On commence par remarquer que $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \sim \frac{1}{t^{2(n+1)}}$ donc I_n est bien définie.

(b) Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .

Corrigé

Soit $n \in \mathbb{N}$. On commence par remarquer que $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \sim \frac{1}{t^{2(n+1)}}$ donc I_n est bien définie.

On a alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} \\ &= \left[\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2(n+1)x^2}{(1+x^2)^{n+2}} dx \quad \text{CAR LE CROCHET CONVERGE} \\ &= 2(n+1) \left(\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+2}} dx - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+2}} dx \right) \\ &= 2(n+1)I_n - 2(n+1)I_{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit que $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.