

1. On rappelle que pour $t \in]-1, 1[$, $\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$.

Exprimer $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$ à l'aide de la somme d'une série.

Corrigé

Pour $t \in]-1, 1[$, $\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}$. De sorte que pour $t \in]0, 1[$,

$$\frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} \ln(t)}{k} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \ln(t)}{k+1}$$

On veut appliquer le théorème d'intégration terme à terme. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k la fonction définie sur $]0, 1[$ par

$$f_k : t \mapsto -\frac{t^k \ln(t)}{1+k}$$

— La fonction $f_0 : t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0, 1[$ car elle est continue sur $]0, 1[$ et $\ln t = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$; pour $k \geq 1$, les fonctions f_k sont continues sur $]0, 1[$ et prolongeables par continuité en 0 car $t^k \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. Elles sont donc intégrables sur $]0, 1[$.

— La série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers $t \mapsto \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$ qui est continue.

— Les fonctions f_k sont à valeurs positives

Par le théorème d'intégration terme à terme des séries de fonctions positives, dans $[0, +\infty]$,

$$\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k(t) dt$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, on réalise une intégration par parties (le crochet converge et vaut 0 pour la même raison que ci-dessus) :

$$\int_0^1 f_k = \left[-\frac{t^{k+1} \ln t}{(k+1)^2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^k}{(k+1)^2} dt = \frac{1}{(k+1)^3}$$

On en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t}$ est intégrable et que

$$\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 f_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(3)$$

2. (a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{1 - u^n} du$

Corrigé

On veut appliquer le théorème de convergence dominée. On pose $f_n : u \mapsto \sqrt{1 - u^n}$ définie et continue sur $[0, 1]$. La suite de fonction converge simplement vers f définie par

$$f : u \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, en posant φ la fonction constante égale à 1 qui est intégrable sur $[0, 1]$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$.

On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{1 - u^n} du = \int_0^1 f(u) du = 1.$$

- (b) En déduire un équivalent de $I_n = \int_0^n \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx$.

Corrigé

On pose le changement de variable $u = \left(1 - \frac{x}{n}\right)$ qui est affine. On a $du = -\frac{1}{n} dx$. On en déduit

$$\int_0^n \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} dx = -n \int_1^0 \sqrt{1 - u^n} du = n \int_0^1 \sqrt{1 - u^n} du$$

Comme $\int_0^1 \sqrt{1 - u^n} du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ on a $I_n \sim n$.