1. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. On suppose que $\chi_A = (X-1)^2(X+3)$

Corrigé

- La matrice A EST trigonalisable car χ_A est scindé.
- On ne sait pas si elle est diagonalisable car l'espace propre associé à la valeur propre 1 peut être de dimension 1 ou 2. Par exemple si

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

  La matrice A_1 est diagonalisable et la matrice A_2 ne l'est pas.
- On a $\mathrm{tr}(A) = -1$ (somme des valeurs propres avec multiplicités)
- On a $\det(A) = -3$ (produit des valeurs propres avec multiplicités)

2. Soit $A \in \mathscr{M}_5(\mathbf{R})$ telle que $A^3 \neq 0$ et $A^4 = 0$.

Corrigé

- $\chi_A \neq X^4$.
- $\chi_A = X^5$.
- On a $\mathrm{tr}(A) = 0$ (somme des valeurs propres avec multiplicités)
- On a $\det(A) = 0$ (produit des valeurs propres avec multiplicités)

3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$$

Corrigé

- La matrice A est de rang 1. On en déduit que $\dim(E_0(A)) = n-1$ et donc il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\chi_A = X^{n-1}(X-\alpha)$. En utilisant que $\mathrm{tr}(A) = \frac{n(n+1)}{2}$ on obtient

$$\chi_A = X^n - \frac{n(n+1)}{2}X^{n-1}$$

Corrigé

- On a vu que $\dim(E_0(A)) = n - 1$. Comme $\dim(E_{n(n+1)/2}(A)) = 1$ on a

$$n = \dim(E_0(A)) + \dim(E_{n(n+1)/2}(A))$$

La matrice A est diagonalisable.

4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathbf{C}$ telle que $A^4 = -A^3 - A^2$.
Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 2\mathrm{tr}(A)$.

Corrigé

Comme $A^4 + A^3 + A^2 = 0$, les valeurs propres de A vérifient que $X^2(X^2 + X + 1) = 0$. Cela montre que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, j, \overline{j}\}$.
Notons r, s et t les multiplicités des valeurs propres 0, j et $\overline{j}$.. La matrice A est semblable à la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(0I_r, jI_s, \overline{j}I_t)$.
On en déduit que $\mathrm{rg}(A) = s + t$ or $\mathrm{tr}(A) = -\frac{1}{2}(s + t) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(s - t)$.
Comme la trace est réelle, $s = t$ et donc $\mathrm{rg}(A) = -2\mathrm{tr}(A)$.