

Partie I

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = n) \geq 0$ (car $\zeta(x) > 1 > 0$)

De plus, dans $[0, +\infty]$;

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \zeta(x) = 1$$

On en déduit la formule donnée définie bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X \in a\mathbb{N}^*) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = ka)\right) \quad (\text{par définition de } a\mathbb{N}^*) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = ka) \quad (\text{événements incompatibles}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)} \frac{1}{(ak)^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)a^x} \zeta(x) = \frac{1}{a^x}. \end{aligned}$$

Partie II

3. Par définition, pour montrer que la famille $((X = p_i \mathbb{N}^*))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements indépendants, il faut montrer que pour toute sous famille $(i_1, \dots, i_r)$ d'éléments distincts de $\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\bigcap_{k=1}^r (X \in p_{i_k} \mathbb{N}^*)) = \prod_{i=1}^r \mathbf{P}(X \in p_{i_k} \mathbb{N}^*)$

On considère donc $(i_1, \dots, i_r)$ des éléments distincts de $\mathbb{N}^*$. On sait que pour $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \omega \in \bigcap_{k=1}^r (X \in p_{i_k} \mathbb{N}^*) &\iff \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \omega \in (X \in p_{i_k} \mathbb{N}^*) \\ &\iff \forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, p_{i_k} \mid X(\omega) \\ &\iff \left(\prod_{i=1}^r p_{i_k} \right) \mid X(\omega) \quad (\text{car les } p_i \text{ sont premiers entre eux}) \\ &\iff \omega \in (X \in a\mathbb{N}^*) \quad (\text{où } a = \prod_{k=1}^r p_{i_k}) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^r (X \in p_{i_k} \mathbb{N}^*)\right) = \mathbf{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^x} = \left(\prod_{k=1}^r p_{i_k}\right)^{-x} = \prod_{k=1}^r p_{i_k}^{-x} = \prod_{i=1}^r \mathbf{P}(X \in p_{i_k} \mathbb{N}^*)$$

On a bien montré que la famille $((X = p_i \mathbb{N}^*))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements indépendants.

4. Par continuité décroissante, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k \mathbb{N}^*)\right).$$

Or, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\omega \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k \mathbb{N}^*) &\iff \forall k \in \mathbb{N}^*, \omega \in (X \notin p_k \mathbb{N}^*) \\ &\iff \forall k \in \mathbb{N}^*, p_k \nmid X(\omega) \\ &\iff \forall p \in \mathcal{P}, p \nmid X(\omega) \\ &\iff X(\omega) = 1\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k \mathbb{N}^*) \right) = \mathbf{P}(X = 1).$$

Par suite, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta(x)} &= \mathbf{P}(X = 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=1}^n (X \notin p_k \mathbb{N}^*) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(X \notin p_k \mathbb{N}^*) \quad (\text{indépendance prouvée à la question 3}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(X \in p_k \mathbb{N}^*)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^x} \right) \quad (\text{d'après la question 2}).\end{aligned}$$

5. On veut calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x)$. On remarque que la fonction ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$. En effet,

soit $1 < x \leq y$, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{n^x} \geq \frac{1}{n^y}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^y}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient bien que $\zeta(x) \geq \zeta(y)$.

On en déduit que ζ admet une limite notée $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 1^+ .

De plus, pour tout entier n et tout $x \in]1, +\infty[$, $\zeta(x) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x}$. En faisant tendre x vers 1^+ on en

déduit que $\ell \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Il suffit alors de faire tendre n vers $+\infty$ et d'utiliser que la série harmonique diverge pour obtenir que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = \ell = +\infty$$

Tous les termes étant strictement positifs et la fonction $\ln$ étant continue, la formule prouvée à la question 4) devient :

$$\forall x \in]1, +\infty[, -\ln(\zeta(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{1}{p_k^x} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{p_k^x} \right)$$

Supposons par l'absurde que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$ converge. Par comparaison pour les séries à termes

négatifs, la série $\sum_{k \geq 1} \ln \left(1 - \frac{1}{p_k} \right)$ converge aussi car $\ln \left(1 - \frac{1}{p_k} \right) \sim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{p_k}$. Posons $f_k : x \mapsto \ln \left(1 - \frac{1}{p_k^x} \right)$

définie sur $]1, +\infty[$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{p_k^x}$ est décroissante donc f_k est croissante. En voyant alors que f_k est à valeurs négatives, on obtient que $|f_k| = -f_k$ est décroissante. On en déduit que

$$\|f_k\|_{\infty,]1, +\infty[} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f_k(x) = \ln \left(1 - \frac{1}{p_k} \right)$$

Cela montre que la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge normalement donc uniformément au voisinage de 1. On peut donc appliquer le théorème de la double limite :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{p_k} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\ln(\zeta(x)) = -\infty$$

La dernière égalité venant de la limite prouvée en début de question.

C'est donc absurde ; cela prouve que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$ diverge.

Partie III

6. a) On considère donc $(i_1, \dots, i_r)$ des éléments distincts de $\mathbb{N}^*$.

$$C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_r} = ((X \in p_{i_1} \mathbb{N}^*) \cap \dots \cap (X \in p_{i_r} \mathbb{N}^*)) \cap ((Y \in p_{i_1} \mathbb{N}^*) \cap \dots \cap (Y \in p_{i_r} \mathbb{N}^*))$$

En utilisant que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes puis en utilisant les résultats de la question 3), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_r}) &= \mathbf{P}((X \in p_{i_1} \mathbb{N}^*) \cap \dots \cap (X \in p_{i_r} \mathbb{N}^*)) \times \mathbf{P}((Y \in p_{i_1} \mathbb{N}^*) \cap \dots \cap (Y \in p_{i_r} \mathbb{N}^*)) \\ &= \prod_{k=1}^r \mathbf{P}(X \in p_{i_k} \mathbb{N}^*) \times \prod_{k=1}^r \mathbf{P}(Y \in p_{i_k} \mathbb{N}^*) \\ &= \prod_{k=1}^r \mathbf{P}(C_{i_k}) \end{aligned}$$

Cela montre que les événements $(C_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendants.

b) On voit alors que

$$A = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{(X \in p \mathbb{N}^*) \cap (Y \in p \mathbb{N}^*)} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{C_k}$$

c) On a montré à la question 6.a) que les événements $(C_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendants, les complémentaires $(\overline{C_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont aussi indépendants. D'après la propriété de la continuité décroissante, on a :

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{C_k} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(\bigcap_{k=1}^n \overline{C_k} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \mathbf{P}(\overline{C_k}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(C_k))$$

Or

$$\prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(C_k)) \stackrel{\text{indep.}}{=} \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{P}(X \in p_k \mathbb{N}^*) \mathbf{P}(Y \in p_k \mathbb{N}^*)) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^{2x}} \right)$$

Finalement, en utilisant la question 4)

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^{2x}} \right) = \frac{1}{\zeta(2x)}$$

Partie IV

7. Par définition du PGCD, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$W_n(\omega) \in k\mathbb{N}^* \iff k \mid U_n(\omega) \wedge V_n(\omega) \iff (k \mid U_n(\omega) \text{ et } k \mid V_n(\omega))$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) &= \mathbf{P}((U_n \in k\mathbb{N}^*) \cap (V_n \in k\mathbb{N}^*)) \\ &= \mathbf{P}(U_n \in k\mathbb{N}^*)P(V_n \in k\mathbb{N}^*) \quad (U_n \text{ et } V_n \text{ indépendantes}) \\ &= \mathbf{P}(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2 \quad (\text{même loi}). \end{aligned}$$

Or, les entiers j de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vérifiant $k \mid j$ sont les éléments de $k\mathbb{N}^* \cap \llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire les entiers qui s'écrivent ki avec $i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $1 \leq ki \leq n \Leftrightarrow 1 \leq i \leq n/k \Leftrightarrow 1 \leq i \leq \lfloor n/k \rfloor$ (car i est un entier).

On a donc $\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \mid j\} = \{ki, i \in \llbracket 1, \lfloor n/k \rfloor \rrbracket\}$.

Enfin, comme $U_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, on obtient :

$$\mathbf{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \mathbf{P}(U_n \in k\mathbb{N}^*)^2 = \left(\frac{\text{Card}\{ki, i \in \llbracket 1, \lfloor n/k \rfloor \rrbracket\}}{\text{Card}\llbracket 1, n \rrbracket} \right)^2 = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \right)^2.$$

8. a) Soit $\omega \in \Omega$,

$$\omega \in (W_n = 1) \iff W_n(\omega) = 1 \iff \forall p_i \in \mathcal{P}, p_i \nmid W_n(\omega)$$

On en déduit que ω n'appartient pas à $(W_n = 1)$ si et seulement s'il existe un nombre premier qui divise $W_n(\omega)$. Cela signifie

$$\overline{(W_n = 1)} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} (W_n \in p\mathbb{N}^*) = \bigcup_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \leq n}} (W_n \in p\mathbb{N}^*)$$

La deuxième égalité venant du fait que pour tout $\omega \in \Omega$, U_n et V_n sont inférieurs à n et donc leur PGCD aussi.

b) Notons d l'entier tel que p_d soit le plus grand nombre premier inférieur ou égal à n . On a par la formule du crible

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^d (W_n \in p_i\mathbb{N}^*)\right) = \sum_{k=1}^d (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \mathbf{P}((W_n \in p_{i_1}\mathbb{N}^*) \cap \dots \cap (W_n \in p_{i_k}\mathbb{N}^*))$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}(W_n = 1) = 1 + \sum_{k=1}^d (-1)^k \sum_{k \in A(n,k)} \mathbf{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*)$$

où $A(n, k)$ est l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme un produit de k nombres premiers deux à deux distincts inférieurs à n . On en déduit que

$$\mathbf{P}(W_n = 1) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k) \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right)^2$$

en remarquant

— Le terme pour $k = 1$ de la somme de droite vaut 1, car 1 est le produit de 0 nombres premiers.

- Les termes de la somme de droite pour l'indice k où k est divisible par un nombre premier strictement supérieur à n sont nuls car dans ce cas, $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ est nul.
- c) Pour tout entier k non nul, on pose $f_k : n \mapsto \frac{1}{n^2} \mu(k) \left(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor \right)^2$. En utilisant que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lfloor x \rfloor \leq x$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_k(n)| \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{k} \right)^2 \leq \frac{1}{k^2}$$

On en déduit que $\|f_k\|_{\infty, \mathbb{N}} \leq \frac{1}{k^2}$. Comme la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$, la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge normalement sur $\mathbb{N}$. Elle converge donc uniformément sur $\mathbb{N}$. Appliquons alors le théorème de la double limite :

— Pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_k(n) = \frac{\mu(k)}{k^2}$ puisque

$$\frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{k} - 1 \right)^2 \leq \frac{1}{n^2} \left(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor \right)^2 \leq \frac{1}{k^2}$$

— La série de fonctions $\sum_{k \geq 1} f_k$ converge uniformément au voisinage de $+\infty$

On en déduit que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k^2}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(W_n = 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k) \left(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor \right)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(W_n = k) \in [0, 1]$, donc $\ell_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(W_n = k) \in [0, 1]$.

Pour tout entier $k \geq 1$, on pose cette fois $g_k : n \mapsto \mathbf{P}(W_n = k)$.

— La série de fonctions $\sum_{k \geq 1} g_k$ converge simplement vers $S : n \mapsto 1$ car pour tout entier n ,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(W_n = k) = 1.$$

— Pour tout entier $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_k(n) = \ell_k$.

— Il y a convergence uniforme de la série de fonctions sur $\mathbb{N}^*$ vers S puisqu'il y a convergence normale car :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \forall n \in \mathbb{N}^*, |g_k(n)| \leq \mathbf{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\text{donc } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \|g_k\|_{\infty} \leq \frac{1}{k^2}$$

Le théorème de double limite affirme alors que

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_k(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ell_k$$

On a donc $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

10. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, en encadrant comme à la question 8.c) on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \right)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(W \in k\mathbb{N}^*) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) \quad (\text{propriété admise avec } B = k\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*) \\ &= \frac{1}{k^2} \\ &= \mathbf{P}(X \in k\mathbb{N}^*) \quad \text{où } X \text{ suit une loi zêta de paramètre 2 (d'après la question 2)}\end{aligned}$$

D'après la seconde propriété admise, la variable W suit une loi zêta de paramètre 2.

$$\text{On a alors } \ell_1 = \mathbf{P}(W = 1) = \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1}{\zeta(2)1^2} = \frac{1}{\zeta(2)}.$$

Or,

$$\mathbf{P}(W = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(W_n = 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(U_n \wedge V_n = 1)$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, la probabilité, quand on prend indépendamment deux nombres au hasard dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ (loi uniforme) que ces deux nombres soient premiers entre eux, tend vers $\frac{1}{\zeta(2)} \underset{\text{culture}}{=} \frac{1}{\pi^2/6} = \frac{6}{\pi^2}$.