

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Toutes les variables aléatoires seront définies sur cet espace probabilisé.

On admet la formule du crible. Soit $A_1, \dots, A_n$ des événements,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle que $\mathcal{P}$ est infini.

On note $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n < p_{n+1} < \dots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$, etc.

Pour tout réel $x > 1$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge. On note $\zeta(x)$ sa somme.

Partie I

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Justifier qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(x)n^x}.$$

On dira qu'une telle variable aléatoire X suit la loi de probabilité zêta de paramètre x .

2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x > 1$, montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a^x}$.

N.B. L'événement $(X \in a\mathbb{N}^*)$ pourra aussi être noté $(a|X)$ (" a divise X "), mais on se gardera alors de croire que $\mathbf{P}(a|X)$ désigne une probabilité conditionnelle.

Partie II

Soit x un réel tel que $x > 1$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre x .

3. Montrer que la famille $((X \in p_i\mathbb{N}^*))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements indépendants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^n (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$.

4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(X = 1)$. En déduire que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$$

5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x)$.
6. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

On pourra procéder par l'absurde

Partie III

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de probabilité zêta de paramètre x . Soit A l'événement « Aucun nombre premier ne divise X et Y simultanément ». Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note C_k l'événement

$$C_k = (X \in p_k \mathbb{N}^*) \cap (Y \in p_k \mathbb{N}^*).$$

7. a) Montrer que $(C_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'événements indépendants.
- b) Exprimer l'événement A à l'aide des événements $\overline{C_k}$.
- c) En déduire que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{\zeta(2x)}.$$

Partie IV

Soient U_n et V_n deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On note $W_n = U_n \wedge V_n$. Cela signifie que pour tout $\omega \in \Omega$, $W_n(\omega)$ est le PGCD de $U_n(\omega)$ et de $V_n(\omega)$.

8. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbf{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \right)^2$.
9. a) Justifier que $\overline{(W_n = 1)} = \bigcup_{p_i \in \mathcal{P}} (W_n \in p_i \mathbb{N}^*)$.
- b) En déduire que

$$\mathbf{P}(W_n = 1) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k) \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right)^2$$

où $\mu(k)$ vaut 0 si k est divisible par un carré et vaut $(-1)^i$ si k est le produit de i nombres premiers deux à deux distincts.

- c) Montrer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(W_n = 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^2}$$

On pourra poser $f_k(n) = \frac{1}{n^2} \mu(k) \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right)^2$ et appliquer, en le justifiant, le théorème de la double limite

On admet que, de même, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(\mathbf{P}(W_n = k))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ_k .

10. Montrer que $(\ell_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$. *Même conseil qu'en 8)c)*

On note W une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ qui suit cette loi de probabilité. En adaptant la méthode ci-dessus, on peut établir que, pour toute partie B de $\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(W \in B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(W_n \in B)$. On ne demande pas de démontrer ce résultat. Enfin, on admet le résultat suivant : si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \mathbf{P}(Y \in a\mathbb{N}^*)$, alors X et Y suivent la même loi de probabilité.

11. Préciser la loi de W . En considérant ℓ_1 , que peut-on alors en conclure ?