

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On admet qu'il existe un couple (D, N) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie que

(C1) $A = D + N$

(C2) La matrice D est diagonalisable

(C3) La matrice N est nilpotente

(C4) $DN = ND$

On sait de plus que D et N appartiennent à $\mathbb{C}[A]$.

Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A . Son unicité est démontrée dans la partie I

Partie I - Unicité de la décomposition de Dunford

1. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i .

- a) Démontrer que les sous-espaces propres de u sont stables par v .

Pour tout $1 \leq i \leq p$, on note v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.

- b) Justifier que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, v_i est diagonalisable et en déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v .

2. Soit M et M' deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $M - M'$ est diagonalisable.
3. Soit N et N' deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, démontrer que la matrice $N - N'$ est nilpotente.
4. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.
5. Soit (D', N') un couple de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie les conditions (C1), (C2), (C3) et (C4). Montrer que $D' = D$ et $N' = N$.

Partie II - Quelques exemples

6. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.

7. Le couple $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

8. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme minimal χ_A , puis donner la décomposition de Dunford de A .

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

Justifier que le polynôme $X(X - 1)$ est annulateur de la matrice A^2 .

Démontrer que la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par :

$$D = A^2 \text{ et } N = A - A^2$$

Partie III - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice A .

On notera id l'application identité de $\mathbb{C}^3$.

10. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
Justifier que : $\mathbb{C}^3 = \text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Ker}(u - 2\text{id})^2$.
11. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{C}^3$ telle que :
 $\text{Ker}(u - \text{id}) = \text{Vect}\{e_1\}$, $\text{Ker}(u - 2\text{id}) = \text{Vect}\{e_2\}$, $\text{Ker}(u - 2\text{id})^2 = \text{Vect}\{e_2, e_3\}$.
Ecrire la matrice B de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{C}^3$.
12. Déterminer la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire la décomposition de Dunford de la matrice A .
13. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1 \text{ avec } \deg(U) < 2 \text{ et } \deg(V) < 1.$$

14. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\text{id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \text{id})$.
Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{C}^3$.
Démontrer que p est le projecteur sur $\text{Ker}(u - \text{id})$ parallèlement à $\text{Ker}(u - 2\text{id})^2$ et q est le projecteur sur $\text{Ker}(u - 2\text{id})^2$ parallèlement à $\text{Ker}(u - \text{id})$.
15. On pose $d = p + 2q$.
 - a) Écrire la matrice de d dans la base $\mathcal{B}$ (définie à la question 11).
 - b) Déterminer la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).