

Exercice I

1) a) La fonction g étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est bornée. Par 1-périodicité de g , elle est bornée sur $\mathbb{R}$. En effet, notant M un majorant de $|g|$ sur $[0, 1]$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| = |g(y)| \leq M$ où $y = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$.

b) Notons $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto a^n g(b^n x)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $0 \leq |a^n g(b^n x)| \leq \|g\|_\infty a^n$ donc $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc converge simplement.

c) Par la question précédente, $\sum f_n$ converge uniformément. Les fonctions f_n étant continues, la fonction W est continue.

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|W(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|g\|_\infty a^n = \frac{\|g\|_\infty}{1-a}$. Ainsi W est bornée et

$$\|W\|_\infty \leq \frac{\|g\|_\infty}{1-a}.$$

2) a) Soit f une fonction bornée de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|T(f)(x)| \leq a\|f\|_\infty$$

Donc $T(f)$ est bornée.

Pour f et g bornées et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(\lambda f + g)(x) = a(\lambda f + g)(bx) = \lambda a f(bx) + a g(bx) = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

donc T est linéaire.

b) Soit f bornée telle que $T(f) = f$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a f(bx)$$

Comme $x \mapsto bx$ est surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on a

$$\|x \mapsto f(bx)\|_\infty = \|f\|_\infty$$

Comme $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, on a donc $\|f\|_\infty = |a| \cdot \|f\|_\infty = a\|f\|_\infty$.

Comme $a \neq 1$ et $(1-a)\|f\|_\infty = 0$, on a $\|f\|_\infty = 0$ donc f est nulle.

Donc 1 n'est pas une valeur propre de T .

c) Remarquons que pour tout naturel n , $T(f_n) = f_{n+1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(W)(x) = aW(bx) = a \sum_{n=0}^{\infty} a^n g(b^n bx) = \sum_{p=1}^{\infty} g(b^p x) = W(x) - g(x)$.

Donc $T(W) = W - g$.

Soit Z une fonction bornée vérifiant la même relation.

Par linéarité de T , $T(W - Z) = W - Z$. Comme 1 n'est pas valeur propre de T , $W - Z = 0$ donc $W = Z$.

3) a) Comme $\beta_m - x_0 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ et $\alpha_m - x_0 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$

$$\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(\beta_m - x_0) + o(\beta_m - x_0) - (f(x_0) + f'(x_0)(\alpha_m - x_0) + o(\alpha_m - x_0))}{\beta_m - \alpha_m}$$

Or $|\beta_m - x_0| = \beta_m - x_0 \leq \beta_m - \alpha_m = |\beta_m - \alpha_m|$ et $|\alpha_m - x_0| = x_0 - \alpha_m \leq \beta_m - \alpha_m = |\beta_m - \alpha_m|$ donc $\beta_m - x_0 = O(\beta_m - \alpha_m)$ et $\alpha_m - x_0 = O(\beta_m - \alpha_m)$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} &= \frac{f'(x_0)(\beta_m - x_0) - f'(x_0)(\alpha_m - x_0) + o(\beta_m - \alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \\ &= \frac{f'(x_0)(\beta_m - \alpha_m) + o(\beta_m - \alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \boxed{\xrightarrow{m \rightarrow \infty} f'(x_0)} \end{aligned}$$

b) Pour tout réel x , et tout entier k , l'encadrement $-\frac{1}{2} < x - k \leq \frac{1}{2}$ équivaut à $x + \frac{1}{2} > k \geq x - \frac{1}{2}$. Il existe un unique entier k vérifiant ceci, c'est $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$.

On applique ce résultat à $x = b^m x_0$.

c) $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$
 $|\sin x - \sin y| = 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right|$

Par récurrence, $|\sin x - \sin y| \leq 2^n \left| \sin \frac{x-y}{2^n} \right| = |x - y| \left| \frac{\sin \frac{x-y}{2^n}}{\frac{x-y}{2^n}} \right|$.

Or $\frac{x-y}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $\frac{\sin \frac{x-y}{2^n}}{\frac{x-y}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin'(0) = 1$. Par passage à la limite dans les inégalités larges,

$$\boxed{|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \cdot 1 = |x - y|}$$

.

(c'est plus simple avec l'inégalité des accroissements finis...)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{g(b^n \beta_m) - g(b^n \alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \right| &\leq \sum_{n=0}^{m-1} \left| a^n \frac{g(b^n \beta_m) - g(b^n \alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \right| \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \left| a^n \frac{\sin(2\pi b^n \beta_m) - \sin(2\pi b^n \alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{|2\pi b^n \beta_m - 2\pi b^n \alpha_m|}{\beta_m - \alpha_m} \\ &= \boxed{2\pi \sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n} \\ &= 2\pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} \end{aligned}$$

d)

$$2\pi b^m \alpha_m = 2\pi \left(k_m - \frac{3}{4} \right) \equiv -\frac{3\pi}{2} [2\pi]$$

donc $g(b^m \alpha_m) = 1$

$$2\pi b^m \beta_m = 2\pi(k_m + \frac{3}{4}) \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi]$$

donc $\boxed{g(b^m \beta_m) = -1}$

Soit n un entier tel que $n > m$.

$$2\pi b^n \alpha_m = 2\pi b^{n-m}(k_m - \frac{3}{4}) \equiv -\frac{3\pi b^{n-m}}{2} \equiv 0 [\pi]$$

car b est un entier pair et $n - m > 0$ donc b^{n-m} est pair.

Donc $\boxed{g(b^n \alpha_m) = 0}$.

De même, $\boxed{g(b^n \beta_m) = 0}$.

e)

$$\begin{aligned} \frac{W(\beta_m) - W(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{g(b^n \beta_m) - g(b^n \alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{g(b^n \beta_m) - g(b^n \alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} + a^m \frac{-1 - 1}{\beta_m - \alpha_m} \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{g(b^n \beta_m) - g(b^n \alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \right| - \frac{2a^m}{\beta_m - \alpha_m} \\ &\leq 2\pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} - \frac{2a^m}{\beta_m - \alpha_m} \\ &\leq 2\pi \frac{(ab)^m}{ab - 1} - \frac{2a^m}{\frac{6}{4b^m}} \\ &= \boxed{(ab)^m \left(\frac{2\pi}{ab - 1} - \frac{4}{3} \right)} \end{aligned}$$

f) Supposons que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

$ab - 1 > \frac{3\pi}{2}$ donc $\frac{1}{ab-1} < \frac{2}{3\pi}$ et $\frac{2\pi}{ab-1} < \frac{4}{3}$ et comme $ab > 1$, on a par la majoration précédente :

$$\frac{W(\beta_m) - W(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} -\infty$$

Or $b^m x_0 - \frac{1}{2} \leq k_m < b_m x_0 + \frac{1}{2}$ donc $x_0 - \frac{1}{2b^m} \leq k_m < x_0 + \frac{1}{2b^m}$ donc

$$x_0 - \frac{1}{2b^m} - \frac{3}{4b^m} \leq \alpha_m < x_0 + \frac{1}{2b^m} - \frac{3}{4b^m} < x_0$$

et

$$x_0 < x_0 - \frac{1}{2b^m} + \frac{3}{4b^m} \leq \beta_m < x_0 + \frac{1}{2b^m} + \frac{3}{4b^m} < x_0$$

On en déduit que les suites (α_m) et (β_m) vérifient bien les hypothèses de la question 3)a).

Donc, d'après cette même question, W n'est pas dérivable en x_0 (car sinon on aurait $W'(x_0) = -\infty$.)

Ainsi $\boxed{W \text{ n'est dérivable en aucun point.}}$

Cet exemple donné par Weierstrass d'une fonction continue partout et dérivable nulle part a choqué certains lors de sa publication. Charles Hermite écrit en 1893 dans une lettre à Thomas Stieltjes :

« Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivées »

Exercice II

On propose d'étudier des séries de fonctions particulières appelées séries de Dirichlet.

Une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ est dite de Dirichlet s'il existe des suites de réels $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) = a_n e^{-\lambda_n x},$$

avec

$$(C1) \quad \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq \frac{M}{2^n}$$

$$(C2) \quad \text{La suite } (\lambda_n)_{n \geq 0} \text{ est strictement croissante.}$$

$$(C3) \quad \lambda_0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty, \quad \text{et} \quad \lambda_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(n).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit alors la quantité $b_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k a_n$.

1) Soit $k \in \mathbb{N}$.

On a quand n tend vers l'infini : $\lambda_n^k a_n = O(n^k) O(1/2^n) = o(1/n^2)$ car $\frac{n^{k+2}}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument, il en va de même pour la série $\sum_{n \geq 1} \lambda_n^k a_n$ donc le réel b_k est bien défini.

2) Pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x \geq 0$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{2^n}$$

car $\lambda_n \geq \lambda_0 = 0$.

Ainsi pour tout $n \geq 0$ on a : $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}^+} \leq \frac{M}{2^n}$. Par conséquent la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$, donc uniformément.

Comme de plus chacune des fonctions f_n est continue, la fonction f est continue.

3)

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^0 a_n = a_0 + b_0$$

Comme la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ (donc au voisinage de $+\infty$) et comme $f_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} a_0$ et pour tout $n \geq 1$, on a : $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ car $\lambda_n > \lambda_0 = 0$, on a par le théorème de double limite :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = a_0$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq 0$, $f_n^{(k)}(x) = (-\lambda_n)^k f_n(x)$.

On en déduit $\|f_n^{(k)}\|_{\infty, \mathbb{R}^+} = \lambda_n^k |a_n|$.

Comme d'après la question 1) la série définissant b_k converge absolument, chacune des séries $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\lambda_n)^k e^{-\lambda_n x}$$

En particulier pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\lambda_n)^k = (-1)^k b_k$$

car $\lambda_0^k = 0^k = 0$.

5) Supposons que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Alors f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$, donc sa limite à l'infini est nulle.

D'après la questions 3) on a donc : $a_0 = 0$.

Comme a_0 est nul, on a pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = e^{-\lambda_1 x} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_1)x} = e^{-\lambda_1 x} g(x)$$

avec $g : x \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} a_{p+1} e^{-\mu_p x}$ où on a posé $\mu_p = \lambda_{p+1} - \lambda_1$.

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $g(x) = e^{\lambda_1 x} f(x) = 0$.

Or la suite $(a_{p+1})_{p \geq 0}$ vérifie (C1) (en remplaçant M par $M/2$) et la suite $(\mu_p)_{p \geq 0}$ vérifie (C2) et (C3) car $p+1 = O_{p \rightarrow \infty}(p)$, et les autres vérifications sont immédiates.

En appliquant à nouveau la question 3) on en déduit que $a_{0+1} = 0$. Donc $a_1 = 0$.

En itérant ce raisonnement, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$. Dans le détail, au choix :

- on procède par récurrence forte. En supposant que $a_0 = \dots = a_k = 0$, on montre que $a_{k+1} = 0$ en factorisant f par $x \mapsto e^{-\lambda_{k+1}x}$.
- on procède par l'absurde. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p \neq 0$. En considérant le plus petit tel entier et en le notant p , on peut alors procéder comme ci-dessus.