

Exercice

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \exp(n \ln(\cos x)) dx$$

Posons alors $x = \frac{u}{\sqrt{n}}$, $dx = \frac{1}{\sqrt{n}} du$. Par changement de variable affine,

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\pi\sqrt{n}/2} \exp(n f(u/\sqrt{n})) du$$

2) a) La fonction f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $f' : x \mapsto -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

On en déduit que f' est dérivable et $(f')' : x \mapsto -(1 + \tan^2 x)$. La fonction $\tan$ étant croissante et positive, la fonction $(f')'$ est décroissante ce qui montre que f' est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

b) La fonction f' étant concave sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, sa courbe est sous sa tangente à l'origine. On en déduit que pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$: $f'(x) \leq f'(0) + f''(0)x = -x$.

En intégrant,

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(u) du \leq \int_0^x -u du = -\frac{x^2}{2}$$

3) Appliquons le théorème de convergence dominée.

— Soit $u \in [0, +\infty[$,

$$n \ln(\cos(u/\sqrt{n})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n(\cos(u/\sqrt{n}) - 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{(u/\sqrt{n})^2}{2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -u^2$$

Pour n assez grand, $g_n(u) = \exp(n f(u/\sqrt{n}))$ donc, par continuité de $\exp$,

$$g_n(u) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \exp(-u^2)$$

— Domination : Soit $u \in [0, +\infty[$ et $n \geq 1$, on a par croissance de $\exp$ et en utilisant 2.b,

$$|g_n(u)| \leq \exp(n f(u/\sqrt{n})) \leq \exp\left(-n \frac{(u/\sqrt{n})^2}{2}\right) = \exp(-u^2/2)$$

Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \int_0^{+\infty} \exp(-u^2/2) du$$

On en déduit que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{G}{\sqrt{n}}$ où $G = \int_0^{+\infty} \exp(-u^2/2) du$.

4) On a donc $\frac{G}{\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{n}}$ et donc $G = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

5) a) On a vu que $f'' : x \mapsto -(1 + \tan^2(x))$. On sait que $\tan(x) = x + o(x)$ d'où

$$f''(x) = -1 - x^2 + o(x^2)$$

En intégrant deux fois et en utilisant que $f'(0) = 0$ puis que $f(0) = 0$ on en déduit que

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

b) Pour $u \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \exp(nf(u/\sqrt{n})) - \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) &= \exp\left(-\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{12n} + o\left(\frac{u^4}{n}\right)\right) - \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \left(\exp\left(-\frac{u^4}{12n} + o\left(\frac{u^4}{n}\right)\right) - 1\right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{u^4}{12n} \end{aligned}$$

c) On a vu que la dérivée de la fonction tangente était croissante ce qui montre que $\tan$ est convexe. Sa courbe est donc sous ses cordes. En particulier, si on considère la corde entre les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{4}$, on obtient que pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\tan x \leq \frac{4}{\pi}x$.

En réutilisant les calculs de la question 2.b, on obtient que

$$f''(x) = -(1 + \tan^2 x) \geq -1 - \frac{16}{\pi^2}x^2$$

En intégrant deux fois et en utilisant que $f(0) = f'(0) = 0$, on a

$$f(x) \geq -\frac{x^2}{2} - \frac{16}{\pi^2} \frac{x^4}{12}$$

En réutilisant le résultat de la question 2.b) on a finalement que pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$-\frac{x^2}{2} - \frac{16}{\pi^2} \frac{x^4}{12} \leq f(x) \leq -\frac{x^2}{2}$$

d) Pour $n \geq 1$,

$$T_n = n \int_0^{\frac{\pi}{4}\sqrt{n}} \exp(nf(u/\sqrt{n})) - \exp(-u^2/2) du$$

Posons h_n définie par $h_n(u) = n(\exp(nf(u/\sqrt{n})) - \exp(-u^2/2))$ si $u \leq \frac{\pi\sqrt{n}}{4}$ et 0 sinon de sorte que $T_n = \int_0^{+\infty} h_n(u) du$.

Appliquons le théorème de convergence dominée.

— D'après la question 5.b), pour $u \in \mathbb{R}_+$, $h_n(u) \rightarrow -\frac{u^4}{12} \exp(-u^2/2)$.

— Domination. Soit $u \in [0, +\infty[$ et $n \geq 1$. En utilisant 5.c), par croissante de $\exp$ on obtient que

$$ne^{-u^2/2} \left(\exp\left(-\frac{4}{3\pi^2} \frac{u^4}{n}\right) - 1 \right) \leq h_n(u) \leq 0$$

Par convexité de $\exp$, pour $t \in \mathbb{R}$, $\exp(t) - 1 \geq t$ donc

$$-\frac{4}{3\pi^2} u^4 e^{-u^2/2} \leq h_n(u) \leq 0$$

Finalement

$$|h_n(u)| \leq \frac{4}{3\pi^2} u^4 e^{-u^2/2}$$

Pour finir la fonction $u \mapsto u^4 e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car elle est continue et elle est négligeable devant $\frac{1}{u^2}$ en $+\infty$.

Par le théorème de convergence dominée, $(T_n) \rightarrow - \int_0^{+\infty} \frac{u^4}{12} \exp(-u^2/2) du$.

e) Par intégration par partie,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} u^4 \exp(-u^2/2) du &= [-u^3 \exp(-u^2/2)]_0^{+\infty} + 3 \int_0^{+\infty} u^2 \exp(-u^2/2) du \\ &= 3 \int_0^{+\infty} u^2 \exp(-u^2/2) du \end{aligned}$$

car le crochet converge et vaut 0. En refaisant une intégration par partie,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = - \int_0^{+\infty} \frac{u^4}{12} \exp(-u^2/2) du = -\frac{1}{4}G = -\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}$$

f) Pour $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ donc

$$0 \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^n x dx \leq \frac{\pi}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n$$

On en déduit que $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^n x dx = o(\frac{1}{n^2})$.

Par ailleurs, pour $n \geq 16$, $\frac{\pi}{4}\sqrt{n} \geq \pi \geq 2$. On en déduit que pour $u \geq \frac{\pi}{4}\sqrt{n}$, $-\frac{u^2}{2} \leq -u$.

On a alors

$$\int_{\frac{\pi}{4}\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-u^2/2} du \leq \int_{\frac{\pi}{4}\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-u} du = \exp\left(-\frac{\pi}{4}\sqrt{n}\right)$$

Cela montre que $\int_{\frac{\pi}{4}\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = o(\frac{1}{n^2})$.

g) En utilisant ce qui précède

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\pi/4} \cos^n(x) dx + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} Z_n + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(G - \int_{\pi\sqrt{n}/4}^{+\infty} e^{-u^2/2} du + T_n \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4n\sqrt{2n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Problème I

Partie I - Préliminaires

- 1) — Pour $x \in \mathbb{R}$, $x - [x] \in [0, 1]$ donc $\tilde{f}(x)$ est bien définie.
- Comme $x \mapsto x - [x]$ est 1-périodique, $\tilde{f}$ aussi.
- On voit que $x \mapsto x - [x]$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Par composition $\tilde{f}$ est aussi continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. De plus pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \rightarrow n^-} x - [x] = \lim_{x \rightarrow n^-} x - (n-1) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow n^+} x - [x] = \lim_{x \rightarrow n^+} x - n = 0$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow n^-} \tilde{f}(x) = f(1) = f(0) = \lim_{x \rightarrow n^+} \tilde{f}(x)$$

Cela montre la continuité de $\tilde{f}$ en n .

On a bien montré que $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$.

- 2) La restriction de f à $[0, 1]$ est bornée comme fonction continue sur un segment. Notons M tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq M$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = |f(x - \lfloor x \rfloor)| \leq M$. Ce qui montre que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

- 3) Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f restreinte à $[-1, 1]$ est continue sur un segment donc uniformément continue par le théorème de Heine. Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in [-1, 1] \quad |y - x| \leq \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$. Quitte à diminuer η , on peut supposer que $\eta \leq 1$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|y - x| \leq \eta$. Supposons $x \leq y$ et posons $n = \lfloor y \rfloor$. Alors $y' = y - n \in [0, 1[$ et $x' = x - n \in [-\eta, 1[\subset [-1, 1]$. De plus $|y' - x'| = |y - x| \leq \eta$. Il s'ensuit que

$$|f(y) - f(x)| = |f(y') - f(x')| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

- 4) — Si $z = 0$, on a $z_n = o(1)$. Comme la série $\sum_{n \geq 0} 1$ est divergente et à termes positifs, par sommation des o ,

$$\sum_{k=0}^N z_k = o\left(\sum_{k=0}^N 1\right) = o(N+1)$$

On en déduit que $Z_N = o(1)$ ce qui signifie que $(Z_N) \rightarrow 0 = z$.

— Si $z \neq 0$, on a $w_n = z_n - z$ qui tend vers 0. On en déduit que

$$W_N = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N w_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

En utilisant que $W_N = Z_N - z$, on obtient que $(Z_N)_{N \geq 0}$ tend vers z .

Partie II - Théorème de Fejér et application

- 5) L'intégrale de e_k sur $[0, 1]$ vaut 1 si $k = 0$ et 0 sinon. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N 1 = 1$$

- 6) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^n e_k(x) = e_{-n}(x) \sum_{l=0}^{2n} e_l(x) = e_{-n}(x) \frac{1 - e_{2n+1}(x)}{1 - e_1(x)} = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin \pi x},$$

après factorisation par le demi-angle. K_N est donc la partie imaginaire de

$$\frac{1}{(N+1) \sin \pi x} \sum_{n=0}^N e^{(2n+1)i\pi x} = \frac{e^{i\pi x}}{(N+1) \sin \pi x} \sum_{n=0}^N (e^{2i\pi x})^n = \frac{e^{i\pi x}}{(N+1) \sin \pi x} \frac{1 - e^{2i(N+1)\pi x}}{1 - e^{2i\pi x}}$$

ce qui donne par factorisation par demi-angle

$$\frac{e^{i(N+1)\pi x}}{(N+1) \sin \pi x} \frac{\sin(N+1)\pi x}{\sin \pi x},$$

dont la partie imaginaire est bien $\frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(N+1)\pi x}{\sin \pi x} \right)^2$: c'est le noyau de Fejér.

7) a) Par linéarité de l'intégrale,

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \int_0^1 f(y) e_k(x-y) dy = \boxed{\int_0^1 f(y) K_N(x-y) dy}.$$

b) Par changement de variable $z = x - y$,

$$\sigma_N(f)(x) = \int_x^{x-1} f(x-z) K_N(z) (-dz) = \int_{x-1}^x f(x-z) K_N(z) dz = \boxed{\int_0^1 f(x-z) K_N(z) dz}$$

car la fonction $g : z \mapsto f(x-z) K_N(z)$ est 1-périodique est continue donc la fonction $t \mapsto \int_t^{t+1} g(z) dz$ est constante puisque par le théorème fondamental de l'analyse sa dérivée est $t \mapsto g(t+1) - g(t) = 0$.

Comme $f(x) = \int_0^1 f(x) K_N(z) dz$,

$$\boxed{\sigma_N(f)(x) - f(x) = \int_0^1 (f(x-z) - f(x)) K_N(z) dz,}$$

8) a) Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue par la question 3), il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|y - x| \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$. Quitte à diminuer δ , on peut supposer $\delta < \frac{1}{2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in [0, \delta]$, $|f(x-y) - f(y)| \leq \varepsilon$ et donc comme $\boxed{K_N \text{ est positive}}$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par la question 6) et sur $\mathbb{R}$ par continuité de K_N qui est combinaison linéaire des fonctions continues e_k , on a

$$\boxed{\int_0^\delta |f(x-y) - f(y)| K_N(y) dy \leq \int_0^\delta \varepsilon K_N(y) dy \leq \varepsilon \int_0^1 K_N(y) dy = \varepsilon.}$$

De même si $y \in [1-\delta, 1]$, $y-1 \in [-\delta, 0]$ et par périodicité,

$|f(x-y) - f(x)| = |f(x-(y-1)) - f(x)| \leq \varepsilon$ et on obtient de même l'autre inégalité.

b) Pour $\delta \leq y \leq 1-\delta$, on a $\sin \pi y \geq \sin \pi \delta$ si bien que $K_N(y) \leq \frac{1}{(N+1) \sin^2(\pi \delta)}$. Ainsi,

$$\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)| K_N(y) dy \leq \int_\delta^{1-\delta} \frac{2\|f\|_\infty}{(N+1) \sin^2(\pi \delta)} dy \leq \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1},$$

avec $\boxed{\kappa_{\delta,f} = \frac{2\|f\|_\infty}{\sin^2(\pi \delta)}}$ qui est bien indépendante de N et de x .

c) On fixe $\varepsilon > 0$ et l'on prend δ comme en 8.b). On a par découpage de l'intégrale par la relation de Chasles

$$|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \leq \int_0^1 |f(x-y) - f(x)| K_N(y) dy \leq 2\varepsilon + \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1}.$$

Il existe n_0 tel que si $N \geq n_0$, on a $\frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1} \leq \varepsilon$. Ainsi si $N \geq n_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$|\sigma_N(f)(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$, ce qui prouve la $\boxed{\text{convergence uniforme de } (\sigma_N(f))_N \text{ vers } f}$.

9) a) Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a par intégration par parties

$$c_k(f') = \int_0^1 f'(y) e^{-2ik\pi y} dy = [f(y) e^{-2ik\pi y}]_0^1 + 2ik\pi \int_0^1 f(y) e^{-2ik\pi y} dy = 2ik\pi c_k(f).$$

Par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{c_k(f^{(n)}) = (2ik\pi)^n c_k(f)}.$

b) On a $|c_k(f)| \leq \int_0^1 |f(y)| dy \leq \|f\|_\infty$. Avec $n = 2$ dans l'égalité précédente, on a donc

$$|c_k(f)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{4\pi^2 k^2} \text{ pour } k \neq 0.$$

Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, les séries à termes positifs $\sum |c_k(f)|$ et $\sum |c_{-k}(f)|$ convergent.

c) Les séries de fonctions $\sum c_k(f)e_k$ et $\sum c_{-k}(f)e_{-k}$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$ (et donc uniformément) puisque pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\|c_k(f)e_k\|_\infty = |c_k(f)|$.

Donc la suite $(S_n(f))$ converge uniformément vers

$$g : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)e_k(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}(f)e_{-k}(x)$$

Par la question 4) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sigma_n(f)(x))$ converge donc vers $g(x)$. Mais aussi vers $f(x)$ par 8)c).

On en déduit que $f = g$ et que la suite de fonction $(S_n(f))$ converge uniformément vers f .

Partie III - Équirépartition

10) La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ étant supposée fixée, on notera $\gamma_N(Y)$ au lieu de $\gamma_N(u, Y)$.

• $\Rightarrow$ Soient a, b tels que $0 \leq a < b < 1$. On a alors $\gamma_N([a, b]) = \gamma_N([a, 1]) - \gamma_N([b, 1])$ qui tend par définition vers $1 - a - (1 - b) = b - a$. Pour montrer que cela reste encore vrai dans le cas $b = 1$ il suffit de prouver que $\gamma_N(\{1\})$ tend vers 0. Cela se fait en quantifiant. Soit $\varepsilon > 0$. L'intervalle $[1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1]$ contient le singleton $\{1\}$. On a alors $\gamma_N(\{1\}) \leq \gamma_N([1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1])$ pour tout N et le majorant tend vers $\frac{\varepsilon}{2}$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. Il existe donc un rang N_0 à partir duquel $\gamma_N(\{1\}) \leq \varepsilon$. D'où le résultat par définition de la limite.

• $\Leftarrow$ Pour $b < 1$ on écrit $\gamma_N([a, b]) = \gamma_N([a, 1]) - \gamma_N([b, 1]) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 - a - (1 - b) = b - a$. Dans le cas où $b = 1$ il suffit de montrer que $\gamma_N(\{1\}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, ce qui résulte de $\gamma_N(1) = 1 - \gamma_N([0, 1]) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 - 1 = 0$.

11) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $k_0 = \lfloor x \rfloor$. On voit que $x \in [k_0, k_0 + 1[$ et que pour $k \neq k_0$, $x \notin [k, k + 1[$.

De même en notant $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ puis $j_0 = \lfloor M\{x\} \rfloor$, on voit que $x \in [k_0 + \frac{j_0}{M}, k_0 + \frac{j_0+1}{M}[$ et que si $j \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket \setminus \{j_0\}$, $x \notin [k_0 + \frac{j}{M}, k_0 + \frac{j+1}{M}[$.

Finalement, il n'y a qu'un seul terme de la somme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{M-1} f\left(k + \frac{j}{M}\right) \mathbf{1}_{[k + \frac{j}{M}, k + \frac{j+1}{M}[}(x)$ qui n'est pas nul. On a donc

$$\Phi_{M,f}(x) = f\left(k_0 + \frac{j_0}{M}\right) = f\left(\lfloor x \rfloor + \frac{\lfloor M\{x\} \rfloor}{M}\right)$$

qui est bien défini.

De plus, avec le calcul précédent, on voit que

$$\Phi_{M,f}(x+1) = f\left(k_0 + 1 + \frac{j_0}{M}\right) = f\left(k_0 + \frac{j_0}{M}\right) = \Phi_{M,f}(x)$$

La fonction $\Phi_{M,f}$ est bien périodique (de période 1).

- b) On sait que f est uniformément continue d'après la question 3). Soit η tel que pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|x - y| \leq \eta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Il existe $M \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{1}{M} \leq \eta$. Dans ces conditions, en reprenant les notations de la question précédente, $\Phi_{M,f}(x) = f\left(k_0 + \frac{j_0}{M}\right)$ or, $x \in [k_0 + \frac{j_0}{M}, k_0 + \frac{j_0+1}{M}[$ donc

$$\left| x - \left(k_0 + \frac{j_0}{M} \right) \right| \leq \frac{1}{M} \leq \eta$$

On obtient alors que

$$|\Phi_{M,f}(x) - f(x)| = \left| f\left(k_0 + \frac{j_0}{M}\right) - f(x) \right| \leq \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\|\Phi_{M,f} - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

- c) On a :

$$\int_{[0,1[} \Phi_{M,f} = \sum_{j=0}^{M-1} \int_{[\frac{j}{M}, \frac{j+1}{M}[} \Phi_{M,f} = \sum_{j=0}^{M-1} \frac{1}{M} f\left(\frac{j}{M}\right)$$

Par ailleurs

$$\Phi_{M,f}(u_n) = \sum_{j=0}^{M-1} f\left(\frac{j}{M}\right) \mathbf{1}_{[\frac{j}{M}, \frac{j+1}{M}[}(u_n)$$

$$\sum_{n=1}^N \Phi_{M,f}(u_n) = \sum_{j=0}^{M-1} f\left(\frac{j}{M}\right) \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{[\frac{j}{M}, \frac{j+1}{M}[}(u_n) = \sum_{j=0}^{M-1} f\left(\frac{j}{M}\right) \text{Card}\left(\Gamma_N(u, [\frac{j}{M}, \frac{j+1}{M}[)\right)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_{M,f}(u_n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{M-1} f\left(\frac{j}{M}\right) \gamma_N(u, [\frac{j}{M}, \frac{j+1}{M}[)$$

Par linéarité de la limite,

$$\boxed{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_{M,f}(u_n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{M-1} f\left(\frac{j}{M}\right) \cdot \frac{1}{M} = \int_0^1 \Phi_{M,f}}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) - \int_0^1 f \right| &= \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (f(u_n) - \Phi_{M,f}(u_n)) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_{M,f}(u_n) - \int_0^1 f \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(u_n) - \Phi_{M,f}(u_n)| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_{M,f}(u_n) - \int_0^1 f \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(u_n) - \Phi_{M,f}(u_n)| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_{M,f}(u_n) - \int_0^1 \Phi_{M,f} \right| \\ &\quad + \left| \int_0^1 \Phi_{M,f} - \int_0^1 f \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(u_n) - \Phi_{M,f}(u_n)| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_{M,f}(u_n) - \int_0^1 \Phi_{M,f} \right| \\ &\quad + \int_0^1 |\Phi_{M,f} - f| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit M comme en 11)b). Alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) - \int_0^1 f \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varepsilon + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_{M,f}(u_n) - \int_0^1 \Phi_{M,f} \right| + \int_0^1 \varepsilon \\ &= \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_{M,f}(u_n) - \int_0^1 \Phi_{M,f} \right| + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Enfin par le résultat en début de question, il existe $N_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\forall N \geq N_0 \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_{M,f}(u_n) - \int_0^1 \Phi_{M,f} \right| \leq \varepsilon.$$

On a donc

$$\forall N \geq N_0 \quad \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) - \int_0^1 f \right| \leq 3\varepsilon$$

Pour obtenir une majoration par ε il suffit de reprendre le raisonnement ci-dessus en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{3}$.

Ainsi par définition de la limite,

$$\boxed{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^1 f}$$

12) a) Si $a = 0$ et $b = 1$ il suffit de poser $f_\varepsilon^- = f_\varepsilon^+ = \mathbf{1}_{\mathbf{R}}$.

Dans le cas contraire, il existe $\delta > 0$ tel que $b + \delta \leq (a + 1) - \delta$ car $]0, \frac{a-b+1}{2}] \neq \emptyset$.

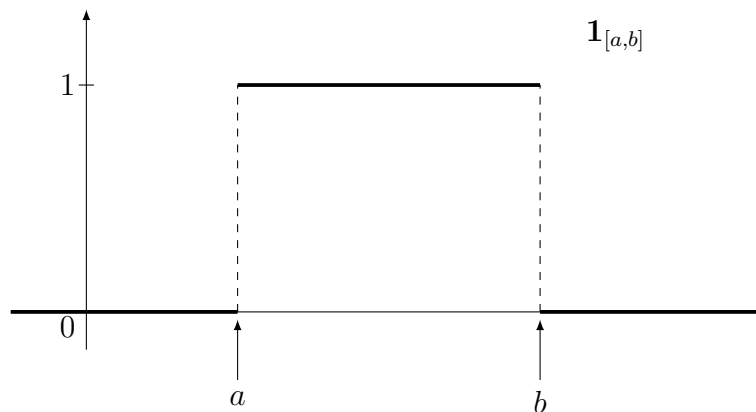
Quitte à diminuer δ on peut supposer de plus que $a + \delta \leq b - \delta$ (car $\frac{b-a}{2} > 0$).

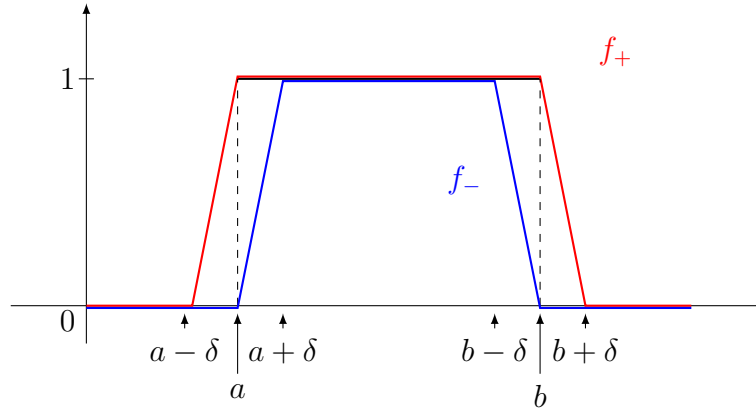
Soient alors :

f^- la fonction 1-périodique valant 1 sur $[a + \delta, b - \delta]$, valant 0 sur $[b, a + 1]$ et affine entre a et $a + \delta$ ainsi qu'entre $b - \delta$ et b .

f^+ la fonction 1-périodique valant 1 sur $[a, b]$, valant 0 sur $[b + \delta, a + 1 - \delta]$ et affine entre $a - \delta$ et a ainsi qu'entre b et $b + \delta$.

Ces deux fonctions sont continues et encadrent $\mathbf{1}_{[a,b]}$.





De plus, comme $f^+ - f^-$ est 1-périodique et c.p.m. (car continue),

$$\int_0^1 (f^+ - f^-) = \int_{a-\delta}^{a-\delta+1} (f^+ - f^-)$$

Cette intégrale est la somme des aires de deux parallélogrammes de base δ et de hauteur 1 donc elle vaut 2δ .

Quitte à diminuer encore δ , on peut supposer que $2\delta \leq \varepsilon$.

Alors f^- et f^+ vérifient les conditions voulues.

b) Dans les notations précédentes on a pour tout $N \in \mathbf{N}^*$:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f^-(u_n) \leq \gamma_N(u, [a, b]) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f^+(u_n)$$

Appliquant l'hypothèse (E) à f^- on a $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f^-(u_n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^1 f^-$ donc il existe N_0 tel que

$$\forall N \geq N_0 \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f^-(u_n) \geq \int_0^1 f^- - \varepsilon$$

De même il existe N_1 tel que

$$\forall N \geq N_1 \quad \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f^+(u_n) \leq \int_0^1 f^+ + \varepsilon$$

Ainsi pour tout $N \geq \max(N_0, N_1)$ on a :

$$\int_0^1 (f^- - \mathbf{1}_{[a,b]}) - \varepsilon \leq \gamma_N(u, [a, b]) - \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]} \leq \int_0^1 (f^+ - \mathbf{1}_{[a,b]}) + \varepsilon$$

Or

$$\int_0^1 (f^+ - \mathbf{1}_{[a,b]}) \leq \int_0^1 (f^+ - f^-) \leq \varepsilon$$

et

$$\int_0^1 (f^- - \mathbf{1}_{[a,b]}) \geq \int_0^1 (f^- - f^+) \geq -\varepsilon$$

Donc pour tout $N \geq \max(N_0, N_1)$ on a :

$$-2\varepsilon \leq \gamma_N - (b - a) \leq 2\varepsilon$$

Par définition de la limite,

$$\gamma_N(u, [a, b]) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} b - a$$

Donc u est équirépartie (modulo 1).

13) Soit $f \in \mathcal{C}_{per}$. Soit $\varepsilon > 0$.

D'après le théorème de Fejér (question 8)c)) il existe $M \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\|f - \sigma_M(f)\|_\infty \leq \varepsilon$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_M(f) &= \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^M \sum_{k=-m}^m c_k(f) e_k \\ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_M(f)(u_n) &= \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^M \sum_{k=-m}^m c_k(f) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e_k(u_n) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^M \left(\sum_{0 < |k| \leq m} c_k(f) \cdot 0 + c_0(f) \cdot 1 \right) = \frac{M+1}{M+1} c_0(f) \end{aligned}$$

par hypothèse et par linéarité de la limite.

Donc il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$,

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_M(f)(u_n) - c_0(f) \right| \leq \varepsilon$$

On a donc pour tout $N \geq N_0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) - c_0(f) \right| &\leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_M(f)(u_n) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sigma_M(f)(u_n) - c_0(f) \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(u_n) - \sigma_M(f)(u_n)| + \varepsilon \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon \end{aligned}$$

Donc par définition de la limite,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(u_n) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} c_0(f) = \int_0^1 f$$

Ainsi par la question 12), la suite u est équirépartie.

14) Soit $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e_k(\alpha n + x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2ik\pi(\alpha n + x)} = \frac{1}{N} e^{2ik\pi(\alpha + x)} \frac{1 - e^{2ik\pi\alpha N}}{1 - e^{2ik\pi\alpha}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

car le second facteur est constant et le dernier facteur est borné (le module du numérateur est majoré par 2 et le dénominateur est constant, et non nul car $k\alpha$ n'est pas entier car sinon, comme $\alpha = \frac{k\alpha}{k}$, α serait rationnel).

D'après la question précédente, la suite $(\alpha n + x)_{n \geq 1}$ est équirépartie.