Exercice

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$W_n = \int_0^{\pi/2} \exp(n \ln(\cos x))dx$$
Posons alors $x = \frac{u}{\sqrt{n}}$, $dx = \frac{1}{\sqrt{n}}du$. Par changement de variable affine,
$$W_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\pi\sqrt{n}/2} \exp(nf(u/\sqrt{n}))du$$

2) a) La fonction f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $f' : x \mapsto -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$.
On en déduit que f' est dérivable et $(f')' : x \mapsto -(1 + \tan^2 x)$. La fonction tan étant croissante et positive, la fonction $(f')'$ est décroissante ce qui montre que f' est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

b) La fonction f' étant concave sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, sa courbe est sous sa tangente à l'origine. On en déduit que pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$: $f'(x) \leqslant f'(0) + f''(0)x = -x$.
En intégrant,
$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(u)du \leqslant \int_0^x -udu = -\frac{x^2}{2}$$

3) Appliquons le théorème de convergence dominée.

— Soit $u \in [0, +\infty[$,
$$n \ln(\cos(u/\sqrt{n})) \underset{n\to+\infty}{\sim} n(\cos(u/\sqrt{n}) - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \left(-\frac{(u/\sqrt{n})^2}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u^2$$
Pour n assez grand, $g_n(u) = \exp(nf(u/\sqrt{n}))$ donc , par continuité de exp,
$$g_n(u) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-u^2)$$

— Domination : Soit $u \in [0, +\infty[$ et $n \geqslant 1$, on a par croissance de exp et en utilisant 2.b,
$$|g_n(u)| \leqslant \exp(nf(u/\sqrt{n})) \leqslant \exp\left(-n\frac{(u/\sqrt{n})^2}{2}\right) = \exp(-u^2/2)$$

Par le théorème de convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, W_n = \int_0^{+\infty} \exp(-u^2/2)du$$
On en déduit que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{G}{\sqrt{n}}$ où $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-u^2/2)du$.

4) On a donc $\dfrac{G}{\sqrt{n}} \sim \dfrac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{n}}$ et donc $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\frac{-u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

5) a) On a vu que $f'' : x \mapsto -(1+\tan^2(x))$. On sait que $\tan(x) = x + o(x)$ d'où

$$f''(x) = -1 - x^2 + o(x^2)$$

En intégrant deux fois et en utilisant que $f'(0) = 0$ puis que $f(0) = 0$ on en déduit que

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

b) Pour $u \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned}
\exp\left(nf(u/\sqrt{n})\right) - \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) &= \exp\left(-\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{12n} + o\left(\frac{u^4}{n}\right)\right) - \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\left(\exp\left(-\frac{u^4}{12n} + o\left(\frac{u^4}{n}\right) - 1\right)\right) \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} -\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\frac{u^4}{12n}
\end{aligned}$$

c) On a vu que la dérivée de la fonction tangente était croissante ce qui montre que tan est convexe. Sa courbe est donc sous ses cordes. En particulier, si on considère la corde entre les points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{4}$, on obtient que pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\tan x \leqslant \frac{4}{\pi}x$.

En réutilisant les calculs de la question 2.b, on obtient que

$$f''(x) = -(1 + \tan^2 x) \geqslant -1 - \frac{16}{\pi^2}x^2$$

En intégrant deux fois et en utilisant que $f(0) = f'(0) = 0$, on a

$$f(x) \geqslant -\frac{x^2}{2} - \frac{16}{\pi^2}\frac{x^4}{12}$$

En réutilisant le résultat de la question 2.b) on a finalement que pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$-\frac{x^2}{2} - \frac{16}{\pi^2}\frac{x^4}{12} \leqslant f(x) \leqslant -\frac{x^2}{2}$$

d) Pour $n \geqslant 1$,

$$T_n = n\int_0^{\frac{\pi}{4}\sqrt{n}} \exp(nf(u/\sqrt{n})) - \exp(-u^2/2)du$$

Posons h_n définie par $h_n(u) = n(\exp(nf(u/\sqrt{n})) - \exp(-u^2/2))$ si $u \leqslant \frac{\pi\sqrt{n}}{4}$ et 0 sinon de sorte que $T_n = \int_0^{+\infty} h_n(u)du$.

Appliquons le théorème de convergence dominée.

— D'après la question 5.b), pour $u \in \mathbb{R}_+$, $h_n(u) \to -\frac{u^4}{12}\exp(-u^2/2)$.

— Domination. Soit $u \in [0, +\infty[$ et $n \geqslant 1$. En utilisant 5.c), par croissante de exp on obtient que

$$ne^{-u^2/2}\left(\exp\left(-\frac{4}{3\pi^2}\frac{u^4}{n}\right) - 1\right) \leqslant h_n(u) \leqslant 0$$

Par convexité de exp, pour $t \in \mathbb{R}$, $\exp(t) - 1 \geqslant t$ donc

$$-\frac{4}{3\pi^2}u^4e^{-u^2/2} \leqslant h_n(u) \leqslant 0$$

Finalement

$$|h_n(u)| \leqslant \frac{4}{3\pi^2}u^4e^{-u^2/2}$$

Pour finir la fonction $u \mapsto u^4e^{-u^2/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car elle est continue et elle est négligeable devant $\frac{1}{u^2}$ en $+\infty$.

Par le théorème de convergence dominée, $(T_n) \to -\int_0^{+\infty} \frac{u^4}{12}\exp(-u^2/2)du$.

e) Par intégration par partie,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} u^4\exp(-u^2/2)du &= \left[-u^3\exp(-u^2/2)\right]_0^{+\infty} + 3\int_0^{+\infty} u^2\exp(-u^2/2)du \\ &= 3\int_0^{+\infty} u^2\exp(-u^2/2)du\end{aligned}$$

car le crochet converge et vaut 0. En refaisant un intégration par partie,

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = -\int_0^{+\infty}\frac{u^4}{12}\exp(-u^2/2)du = -\frac{1}{4}G = -\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}$$

f) Pour $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ donc

$$0 \leqslant \int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^n x dx \leqslant \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

On en déduit que $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^n x\, dx = o(\frac{1}{n^2})$.

Par ailleurs, pour $n \geqslant 16$, $\frac{\pi}{4}\sqrt{n} \geqslant \pi \geqslant 2$. On en déduit que pour $u \geqslant \frac{\pi}{4}\sqrt{n}$, $-\frac{u^2}{2} \leqslant -u$. On a alors

$$\int_{\frac{\pi}{4}\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-u^2/2}du \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-u}du = \exp\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{n}\right)$$

Cela montre que $\int_{\frac{\pi}{4}\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-u^2/2}du = o(\frac{1}{n^2})$.

g) En utilisant ce qui précède

$$\begin{aligned}W_n &= \int_0^{\pi/4}\cos^n(x)dx + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}Z_n + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(G - \int_{\pi\sqrt{n}/4}^{+\infty} e^{-u^2/2}du + T_n\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}} - \frac{\sqrt{\pi}}{4n\sqrt{2n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Problème

Partie I - Premières propriétés des fonctions S_α

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $e^{-xn} = (e^{-x})^n$. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn}$ est une série géométrique, de raison e^{-x} ; elle converge donc si et seulement si $e^{-x} \in]-1, 1[$ c'est-à-dire si et seulement si $x > 0$.

Ainsi la série de fonctions définissant S_1 converge simplement sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$: $\boxed{S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-x})^n = \frac{1}{1-e^{-x}}}$

b) On utilise l'équivalent classique : $e^{-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x$. On en déduit : $\boxed{S_1(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}}$ En particulier, $\boxed{\lim_{x\to 0^+} S_1(x) = +\infty}$

c) Comme $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} S_1(x) = 1$.
De plus, pour tout $x > 0$, on a :

$$S_1(x) - 1 = \frac{1}{1-e^{-x}} - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}.$$

2) a) Soit $x \leqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-xn^\alpha \geqslant 0$, donc $e^{-xn^\alpha} \geqslant e^0 = 1$. Ainsi $\left(e^{-xn^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ diverge grossièrement.

b) Soit $x > 0$. Comme $n^2 e^{-xn^\alpha} = (n^\alpha)^{2/\alpha} e^{-xn^\alpha}$ et que $\lim_{u\to+\infty} u^{2/\alpha} e^{-xu} = 0$, d'après le théorème des croissances comparées, on a $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-xn^\alpha} = 0$. On en déduit : $e^{-xn^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
Les séries $\sum_{n\geqslant 1} e^{-xn^\alpha}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs et la seconde série est une série de Riemann convergente du fait que $2 > 1$; d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-xn^\alpha}$ converge $\boxed{\text{si } x > 0}$

c) D'après les deux questions précédentes, la fonction S_α a pour domaine de définition $]0, +\infty[$.

3) Notons $f_n : x \mapsto e^{-xn^\alpha}$.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [\varepsilon, +\infty[$, on a : $\left|e^{-xn^\alpha}\right| = e^{-xn^\alpha} \leqslant e^{-\varepsilon n^\alpha}$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \|f_n\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} \leqslant e^{-\varepsilon n^\alpha},$$

Or nous avons démontré dans la question 2)b) que la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-\varepsilon n^\alpha}$ converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[\varepsilon, +\infty[$. On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement donc uniformément au voisinage de tout point a de $]0, +\infty[$. Comme de plus, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$, on obtient que S_α est continue sur $]0, +\infty[$.

b) Appliquons le théorème de la double limite :

— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[42, +\infty[$ qui est voisinage de $+\infty$.
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n a une limite finie en $+\infty$;

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit, d'après $\boxed{\text{le théorème de la double limite}}$:

$$\lim_{x\to+\infty} S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1.$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est décroissante sur $]0, +\infty[$; pour tous réels x et y tels que $0 < x \leqslant y$: $f_n(y) \leqslant f_n(x)$. En sommant de 0 à $+\infty$ on a, pour tous réels x et y tels que $0 < x \leqslant y$: $\boxed{S_\alpha(y) \leqslant S_\alpha(x)}$.
On en déduit que la fonction S_α est $\boxed{\text{décroissante sur }]0, +\infty[}$
Une fonction monotone admet une limite, éventuellement infinie, en les extrémités de son domaine de définition ; la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0^+.

d) Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{-xn^\alpha} \geqslant 0$, donc :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \geqslant \sum_{n=0}^{N} e^{-xn^\alpha}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\lim_{x \to 0^+} e^{-xn^\alpha} = e^0 = 1$, par continuité de l'exponentielle en 0. On en déduit, quand $x \to 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} S_\alpha(x) \geqslant \sum_{n=0}^{N} 1 = N+1,$$

l'existence de la limite dans le membre de gauche étant bien établie dans la question 3.c). En faisant alors tendre N vers $+\infty$ on obtient

$$\lim_{x \to 0^+} S_\alpha(x) = +\infty.$$

Partie II - Étude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

4) a) Soit $\alpha \in > 0$. L'application $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

— Étude sur $]0,1]$: On a : $e^{-u}u^{\alpha-1} \underset{u \to 0}{\sim} u^{\alpha-1} = \dfrac{1}{u^{1-\alpha}}$.

Ici $\alpha > 0$ et donc $1-\alpha < 1$. On en déduit que $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1-\alpha}}$ est une fonction de Riemann intégrable sur $]0,1]$. L'application $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ est aussi intégrable sur $]0,1]$.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-u}u^{\alpha-1}du$ converge.

— Étude sur $[1, +\infty[$: On a, d'après le théorème des croissances comparées : $\lim_{u \to +\infty} u^2 \cdot u^{\alpha-1}e^{-u} = 0$. On en déduit :

$$e^{-u}u^{\alpha-1} = \underset{u \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{u^2}\right).$$

La fonction de Riemann $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable $[1, +\infty[$ car $2 > 1$ Cela implique que $u \mapsto e^{-u}u^{\alpha-1}$ l'est également.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du$ converge.

Finalement, l'intégrale $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du$ converge dans le cas où $\alpha > 0$.

b) Par intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} e^{-u}u^\alpha du = \left[-e^{-u}u^\alpha\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-u})\alpha u^{\alpha-1}du$$

L'intégration par parties est valide car $\boxed{u \mapsto e^{-u}u^\alpha \text{ s'annule en } 0}$ et $\boxed{\lim_{u \to +\infty} e^{-u}u^\alpha = 0}$ par croissances comparées. On en déduit

$$\int_0^{+\infty} e^{-u}u^\alpha du = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}du,$$

c'est-à-dire : $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

On a immédiatement : $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}du = \left[-e^{-u}\right]_0^{+\infty} = 1$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.

— Si $n=0$, cela vient d'être établi, vu que $0!=1$ et $\Gamma(1)=1$.

— Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $\Gamma(n+1)=n!$. Alors, d'après l'égalité démontrée ci-dessus :

$$\Gamma(n+2)=(n+1)\Gamma(n+1)=(n+1)n!=(n+1)!$$

— Par le principe de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N},\quad \Gamma(n+1)=n!$

c) Soit $x>0$. On a :

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\int_0^{+\infty}e^{-u}u^{\frac{1}{\alpha}-1}du.$$

Posons $u=xt^\alpha$. La fonction $t\mapsto xt^\alpha$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ dans lui-même. De plus $du=x\alpha t^{\alpha-1}dt$. On en déduit que

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\int_0^{+\infty}e^{-xt^\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-1}t^{1-\alpha}x\alpha t^{\alpha-1}dt=\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}\int_0^{+\infty}e^{-xt^\alpha}dt$$

En particulier, d'après le théorème de changement de variables, l'intégrale $I(\alpha)$ converge et $\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}I(\alpha)}$

5) a) Soit $x>0$. On fait une comparaison entre série et intégrale. L'application $t\mapsto e^{-xt^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout entier $N\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{N+1}e^{-xt^\alpha}dt\leqslant\sum_{n=0}^{N}e^{-xn^\alpha}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient que : $I(\alpha)\leqslant S_\alpha(x)$.

De même,

$$\sum_{n=1}^{N}e^{-xn^\alpha}\leqslant\int_0^{N}e^{-xt^\alpha}dt$$

et donc : $S_\alpha(x)-1\leqslant I(\alpha)$.

On a donc obtenu $\boxed{0\leqslant S_\alpha(x)-I(\alpha)\leqslant 1}$

Or, d'après la question précédente $I(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ et donc

$$0\leqslant S_\alpha(x)-\frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\leqslant 1,$$

b) On a $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)>0$: il s'agit de l'intégrale sur $]0,+\infty[$ d'une fonction CONTINUE, positive et non identiquement nulle. Ainsi, pour tout $x>0$ on a, partant de l'encadrement la question précédente où l'on divise tout par $\dfrac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)>0$, puis ajoute 1 :

$$1\leqslant\frac{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}S_\alpha(x)\leqslant\frac{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}+1,$$

or $\dfrac{1}{\alpha}>0$, donc : $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\alpha}}=0$. Il est alors immédiat que les deux extrémités de l'encadrement ci-dessus ont pour limite 1 quand $x\to 0$. On en déduit, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}S_\alpha(x)=1$. C'est-à-dire :

$$S_\alpha(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Comme, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=+\infty$, on retrouve le résultat de la question 3.d)

6) a) Il suffit de reprendre le changement de variable $u = xt^\alpha$ de la question 4.c) en changeant les bornes. Comme $x > 0$, alors l'application $t \mapsto xt^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et réalise une bijection de $[1, +\infty[$ dans $[x, +\infty[$. On en déduit :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du. \tag{1}$$

b) On réalise une intégration par parties sur $[x, +\infty[$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = \left[-e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]_x^{+\infty} - \int_x^b (-e^{-u}) \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) u^{\frac{1}{\alpha}-2} du$$

L'intégration par parties est valide car le crochet converge puisque $u \mapsto -e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}$ vaut $-e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1}$ en x et que $\lim\limits_{u \to +\infty} -e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} = 0$ par croissances comparées. On en déduit

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \int_x^b e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du.$$

La fonction $u \mapsto e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}$ est positive, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du$ converge et $e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} = \underset{+\infty}{o}\left(e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\right)$. D'après le théorème d'intégration des relations de comparaison,

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du = \underset{+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du\right)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} &= \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \int_x^b e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du \\ &= \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du + \underset{+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \end{aligned}$$

c) En utilisant les résultats des questions 6.a) et 6.c) on obtient :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{\alpha x}.$$

Le terme de droite est négligeable devant e^{-x} quand $x \to +\infty$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt$ est négligeable devant e^{-x} quand $x \to +\infty$.

7) a) On reprend la comparaison entre série et intégrale de la question 5.c), mais en sommant à partir de $n = 2$. Pour toutn entier N, on a

$$\sum_{n=2}^{N} e^{-xn^\alpha} \leqslant \int_1^N e^{-xt^\alpha} dt$$

L'inégalité voulue est alors obtenue en faisant tendre N vers $+\infty$.

b) Pour tout $x > 0$, on a :

$$S_\alpha(x) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha}.$$

Or, d'après les questions précédentes, on a :

$$0 \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{-x}\right),$$

ce dont on déduit que : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{-x}\right)$.

Finalement,

$$S_\alpha(x) - 1 = e^{-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = e^{-x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{-x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}.$$