

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

L'exercice et le problème sont indépendants

Exercice

On pose pour tout entier naturel n , $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$.

L'objet de cet exercice est de déterminer un équivalent de W_n lorsque n tend vers l'infini.

On note f la fonction de $[0, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \ln(\cos x)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $W_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{nf(u/\sqrt{n})} du$.

On en déduit que $\sqrt{n}W_n = \int_0^{+\infty} g_n(u) du$ où g_n est définie par

$$g_n : u \mapsto \begin{cases} e^{nf(u/\sqrt{n})} & \text{si } u \leq \frac{\pi}{2}\sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) a) Calculer f' la dérivée de f puis étudier la convexité de f' sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) \leq -\frac{x^2}{2}$.

3) Montrer que la suite $(\sqrt{n}W_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite finie que l'on explicitera à l'aide d'une intégrale.

On pourra utiliser la question 2.b) pour obtenir une domination de la suite $(g_n)_{n \geq 1}$.

En déduire un équivalent de W_n quand n tend vers $+\infty$.

4) On admet que par ailleurs $W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

5) a) Donner le développement limité d'ordre 4 de f en 0.

On pourra commencer par donner le développement limité d'ordre 2 de f'' .

b) En déduire pour $u \in \mathbb{R}^+$ fixé

$$\exp(nf(u/\sqrt{n})) - \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -e^{-u^2/2} \frac{u^4}{12n}$$

c) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ on a : $\tan x \leq \frac{4}{\pi}x$, puis

$$-\frac{x^2}{2} - \frac{16}{\pi^2} \frac{x^4}{12} \leq f(x) \leq -\frac{x^2}{2}$$

d) On pose $Z_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}\sqrt{n}} e^{nf(u/\sqrt{n})} du$ et $T_n = Z_n - \int_0^{\frac{\pi}{4}\sqrt{n}} e^{-u^2/2} du$

Montrer que la suite $(nT_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite qu'on exprimera à l'aide d'une intégrale.

e) Calculer cette intégrale

f) Montrer que $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ et $\int_{\frac{\pi}{4}\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-u^2/2} du$ sont des $o(1/n^2)$ quand $n \rightarrow \infty$.

g) En déduire un développement asymptotique à deux termes (plus un reste) de W_n quand n tend vers $+\infty$.

Problème

Pour tout réel *strictement positif* α , on se propose d'étudier la fonction S_α de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série de fonctions suivante :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} = 1 + e^{-x} + e^{-2^\alpha x} + e^{-3^\alpha x} + e^{-4^\alpha x} + \dots$$

On étudie dans la partie I le domaine de définition et les premières propriétés de la fonction S_α . On introduit dans la partie II des intégrales auxiliaires afin d'obtenir le comportement asymptotique de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.

Partie I - Premières propriétés des fonctions S_α

1) *Étude du cas particulier de la fonction S_1 .*

a) Étudier la convergence simple et expliciter la somme de la série de fonctions définissant S_1 :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn}.$$

b) Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand x tend vers 0.

c) Préciser la limite de $S_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et un équivalent de $S_1(x) - 1$ en $+\infty$.

2) *Étude du domaine de définition des fonctions S_α ($\alpha > 0$).*

a) Examiner pour $x \leq 0$ la nature de la série $\sum_{n \geq 0} e^{-xn^\alpha}$.

b) Pour tout réel $x > 0$, déterminer la limite de la suite $n \mapsto n^2 e^{-xn^\alpha}$.
En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} e^{-xn^\alpha}$ pour $x > 0$.

c) Préciser le domaine de définition de la fonction S_α pour $\alpha > 0$.

3) *Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$).*

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (x \mapsto e^{-xn^\alpha})$ sur $[\varepsilon, +\infty[$. En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} S_\alpha(x) = 1$.

c) Comparer $S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(y)$ pour $0 < x \leq y$ et préciser le sens de variation de la fonction S_α .

En déduire que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0^+ .

d) Soit $x > 0$ et N un entier naturel. Justifier que $S_\alpha(x) \geq \sum_{n=0}^N e^{-xn^\alpha}$.

Quelle est la limite de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0^+ ?

Partie II - Étude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

4) Comparaison de deux intégrales.

On considère pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ les deux intégrales suivantes :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du, \quad \text{et} \quad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt.$$

- a) Montrer que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge. (On rappelle que $\alpha > 0$).
- b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\Gamma(\alpha + 1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$.
Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n + 1)$ pour tout entier naturel n .
- c) Pour tout $x > 0$, effectuer dans l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ le changement de variables défini par $u = xt^\alpha$.
Qu'en déduit-on pour l'intégrale $I(\alpha)$, et quelle relation obtient-on entre $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ et $I(\alpha)$?

5) Recherche d'un équivalent de S_α en 0 ($\alpha > 0$).

- a) En utilisant une comparaison série-intégrale, établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$0 \leq S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{x^{\frac{1}{\alpha}}} \leq 1$$

- b) Retrouver $\lim_{x \rightarrow 0^+} S_\alpha(x)$ puis donner un équivalent de $S_\alpha(x)$ pour $x \rightarrow 0^+$.

6) Majoration d'une intégrale auxiliaire ($\alpha > 0$).

- a) Justifier pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ la relation suivante :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha x^{\frac{1}{\alpha}}} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du.$$

- b) Établir l'égalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du$$

- c) En déduire l'équivalence suivante lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

On pourra utiliser l'intégration des relations de comparaison.

- d) En conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt$ est négligeable devant e^{-x} lorsque x tend vers $+\infty$.

7) Étude asymptotique de S_α en $+\infty$ ($\alpha > 0$).

- a) Établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt$$

- b) En déduire un équivalent de $S_\alpha(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.