

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

L'exercice et le problème sont indépendants. Le sujet est assez long.

Exercice

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

On note μ_u le polynôme minimal de u et χ_u son polynôme caractéristique.

Pour tout entier n , on notera $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

- 1) Soit $x \in E$. Montrer que $I_{u,x} = \{P \in \mathbb{C}[X], P(u)(x) = 0_E\}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ contenant l'idéal I_u des polynômes annulateurs de u .
- 2) En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire $\mu_{u,x}$ tel que $I_{u,x} = \mu_{u,x}\mathbb{C}[X]$ et montrer que $\mu_{u,x}$ divise μ_u .
- 3) Exemple : soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

On admet que $\chi_u = \chi_A = (X - 1)^2(X - 2)^2$.

- a) Déterminer les sous-espaces propres de u et en déduire le polynôme minimal μ_u de u .
- b) Montrer que $\mu_{u,\varepsilon_1} = \mu_u$.
- c) Trouver un vecteur x tel que $\mu_{u,x}$ soit de degré 1. Que vaut $\mu_{u,0_E}$?

On revient dans les questions suivantes au cas général (sauf mention du contraire).

- 4) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les racines (deux à deux distinctes) de μ_u et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités. On a donc $\mu_u = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.
 - a) Montrer que pour tout entier i compris entre 1 et k , il existe un vecteur x_i dans l'ensemble $\text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i} \setminus \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i - 1}$.
 Montrer que dans le cas contraire, $\frac{\mu_u}{X - \lambda_i} = (X - \lambda_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$ annule u .
 - b) Montrer que $\mu_{u,x_i} = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.
 - c) Soient $i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Déduire de la question précédente que $\left(\frac{\mu_u}{X - \lambda_j}\right)(u)(x_i)$ est nul si $i \neq j$ et non nul si $i = j$.
 - d) On pose $x = \sum_{i=1}^k x_i$. Montrer que pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\left(\frac{\mu_u}{X - \lambda_j}\right)(u)(x) \neq 0_E$.

En déduire que $\mu_{u,x} = \mu_u$.

Un tel vecteur sera dit **u -dominant**

- e) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner son polynôme minimal, puis un vecteur u -dominant en appliquant la méthode précédente.

Problème II

Définitions et notations

- On appelle *distribution de probabilité* sur $\mathbb{N}$, toute fonction $\pi : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ telle que $\sum_{x \in \mathbb{N}} \pi(x) = 1$.
- On appelle *matrice de transition* sur $\mathbb{N}$ une application $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ vérifiant que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $\sum_{y \in \mathbb{N}} S(x, y) = 1$.

On notera que N n'est pas une matrice au sens du programme car $\mathbb{N}$ infini.

- Soit S, T deux matrices de transition sur $\mathbb{N}$ on appelle produit de S et T et on note ST l'application $ST : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$ST : (x, z) \mapsto (ST)(x, z) = \sum_{y \in \mathbb{N}} S(x, y)T(y, z)$$

- Soit π une probabilité sur $\mathbb{N}$ et S une matrice de transition, on note $\pi \cdot S$ la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\pi \cdot S : y \mapsto \sum_{x \in \mathbb{N}} \pi(x)S(x, y)$$

- On note I l'application de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $[0, 1]$ définie par

$$I : (x, y) \mapsto I(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque et on ne demande pas de le vérifier que I est une matrice de transition sur $\mathbb{N}$.

Partie I : Généralités

Dans cette partie, nous étudions des propriétés générales des matrices de transition sur $\mathbb{N}$ et des chaînes de Markov.

- 1) Soit S, T, R trois matrices de transition sur $\mathbb{N}$ et π une distribution de probabilité sur $\mathbb{N}$
 - a) Montrer que ST est bien définie et est aussi une matrice de transition sur $\mathbb{N}$ puis que $\pi \cdot S$ est bien définie et est une distribution de probabilité sur $\mathbb{N}$.
 - b) Vérifier que $(ST)R = S(TR)$.

On admet (et on ne demande pas de le démontrer) que de même $\pi \cdot (ST) = (\pi \cdot S) \cdot T$.

Si S est une matrice de transition et si $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel on définit S^n par $S^0 = I$ et la relation de récurrence $S^{n+1} = S^n S$ si $n \geq 0$.

On montre aisément (et on ne demande pas de le vérifier) que S^n est alors une matrice de transition.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Toutes les variables aléatoires du problème seront définies sur cet espace.

Soit S une matrice de transition. On appelle *chaîne de Markov homogène* à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de matrice de transition S , une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq 0$ et tout $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ on ait

$$\mathbf{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_0 = x_0)S(x_0, x_1)S(x_1, x_2) \cdots S(x_{n-1}, x_n)$$

Dans toute la suite du problème, S désignera une matrice de transition et $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de transition S .

2) Pour tout $x \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\pi_n(x) = \mathbf{P}(X_n = x)$. On définit ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ une distribution de probabilité π_n sur $\mathbb{N}$.

a) Soit $n \geq 0$ et $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Justifier que

$$\mathbf{P}(X_n = x) = \sum_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{N}^n} \mathbf{P}(X_0 = x_0)S(x_0, x_1)S(x_1, x_2) \cdots S(x_{n-1}, x)$$

En déduire que : $\mathbf{P}(X_n = x, X_{n+1} = y) = \mathbf{P}(X_n = x)S(x, y)$.

Ainsi, lorsque $(X_n = x)$ n'est pas négligeable on a

$$S(x, y) = \mathbf{P}_{(X_n=x)}(X_{n+1} = y)$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{N}$, $\pi_{n+1}(y) = (\pi_n \cdot S)(y)$.

En déduire que $\pi_n = \pi_0 \cdot S^n$.

3) Soit $p \in]0, 1[$. On suppose dans cette question seulement que S est définie par

$$S : (x, y) \mapsto \begin{cases} p & \text{si } y = x + 1 \\ 1 - p & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Vérifier que S est bien une matrice de transition sur $\mathbb{N}$.

b) On suppose que π_0 est donnée par $\pi_0(0) = 1$ et $\pi_0(x) = 0$ pour $x > 0$.

Calculer π_1, π_2 et déterminer une formule générale pour π_n avec $n \in \mathbb{N}$.

En déduire qu'il existe une distribution de probabilité π_∞ sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $\pi_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pi_\infty(x)$ et la calculer.

Partie II : Récurrence d'une chaîne de Markov

On conserve les notations et hypothèses de la partie I.

On admet qu'on peut choisir $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et $(X_n)_{n \geq 0}$ tels que

$$\forall x_0 \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_0 = x_0) \neq 0$$

On note S_+ la restriction de la matrice de transition S à $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

On remarquera (et on ne demande pas de le démontrer) que, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{y \in \mathbb{N}^*} S(x, y) \in [0, 1]$ mais qu'il peut être strictement inférieur à 1.

On dit que S_+ est une *sous-matrice de transition* sur $\mathbb{N}^*$.

On définit de même les produits et puissances de sous-matrices de transition comme à la question 1), avec des sommations indexées par $\mathbb{N}^*$ et non par $\mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note alors S_+^n pour $(S_+)^n$. Par exemple pour x, z dans $\mathbb{N}^*$,

$$S_+^2(x, z) = \sum_{y \in \mathbb{N}^*} S_+(x, y) S_+(y, z)$$

Pour $u : \mathbb{N}^* \rightarrow [0, 1]$ on note $S_+ \odot u$ la fonction définie de $\mathbb{N}^*$ dans $[0, 1]$ par

$$S_+ \odot u : x \mapsto \sum_{y \in \mathbb{N}^*} S_+(x, y) u(y)$$

4) Justifier que $S_+ \odot u$ est bien à valeurs dans $[0, 1]$.

On pose $U_{-1} = \Omega$ et, pour $n \geq 0$, $U_n = \bigcap_{k=0}^n (X_k \in \mathbb{N}^*)$. On pose aussi $U_\infty = \bigcap_{k=0}^\infty (X_k \in \mathbb{N}^*)$.

On notera alors pour $x \in \mathbb{N}^*$

$$u_n(x) = \mathbf{P}_{(X_0=x)}(U_n) \text{ et } u_\infty(x) = \mathbf{P}_{(X_0=x)}(U_\infty)$$

5) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $u_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$, soient x, y dans $\mathbb{N}^*$, montrer que

$$\mathbf{P}(X_0 = x) S_+^n(x, y) = \mathbf{P}((X_0 = x) \cap U_{n-1} \cap (X_n = y))$$

On pourra procéder comme à la question 2.a)

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) = \sum_{y \in \mathbb{N}^*} S_+^n(x, y)$$

Ainsi les fonctions u_n et la fonction u_∞ ne dépendent que de S et non de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, (X_n))$

7) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = S_+ \odot u_n$.

8) Montrer que $u_\infty = S_+ \odot u_\infty$.

On pourra établir, pour tout $x \in \mathbb{N}^$, la convergence normale sur $\mathbb{N}^*$ de la série $\sum_{y \geq 1} f_y$ où $f_y : n \mapsto S_+(x, y) u_n(y)$*

9) Soit $v : \mathbb{N}^* \rightarrow [0, 1]$ une fonction vérifiant $v = S_+ \odot v$. Montrer que $v \leq u_\infty$.

On pourra commencer par comparer v et u_0 .

Partie III : Processus de naissance et de mort

On suppose dans la suite du problème que la matrice de transition S vérifie que pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, si $|x - y| > 1$ alors $S(x, y) = 0$. Pour simplifier les notations, on pose pour tout $x \in \mathbb{N}$, $\lambda_x = S(x, x + 1)$ et $\mu_x = S(x, x - 1)$ en convenant que $\mu_0 = 0$. On suppose de plus que $\lambda_x > 0$ pour $x \in \mathbb{N}$ et $\mu_x > 0$ pour $x \geq 1$.

10) Soit $x \in \mathbb{N}$. Préciser en fonction de λ_x et μ_x la valeur de $S(x, x)$.

11) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $u_\infty(x + 1) - u_\infty(x) = \frac{\mu_x}{\lambda_x}(u_\infty(x) - u_\infty(x - 1))$.

On pourra utiliser le résultat de la question 8).

En déduire que

$$u_\infty(x) = u_\infty(1) \sum_{i=0}^{x-1} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i}$$

On rappelle que, par convention :

— Pour $x = 0$, $\sum_{i=0}^{x-1} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i} = 0$ car c'est une somme vide.

— Pour $x = 1$, $\sum_{i=0}^{x-1} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i} = \sum_{i=0}^0 \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i} = 1$ car c'est une somme ne comprenant qu'un seul terme qui est un produit vide.

On pose $A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i} \in [0, +\infty]$.

12) On suppose que $A = +\infty$.

a) Montrer que $u_\infty = \tilde{0}$.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov associée à S . On reprend les notations définies après la question 4) de la partie II.

b) Montrer que $\mathbf{P}(U_\infty) = 0$

c) Montrer $\mathbf{P}(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} (X_n = 0)) = 1$.

13) On suppose que $A < +\infty$. Déterminer u_∞ .

14) a) En procédant de même, trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une distribution de probabilité π sur $\mathbb{N}$ telle que $\pi = \pi.S$ et exprimer π dans ce cas.

b) Déterminer π si suppose que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $\lambda_x = p$ et que pour $x > 0$, $\mu_x = q$ où $p < q$.