

## Exercice

1) Soit  $x \in E$ . Montrons que  $I_{u,x} = \{P \in \mathbb{C}[X], P(u)(x) = 0_E\}$  est un idéal de  $\mathbb{C}[X]$ .

— Le polynôme nul appartient à  $I_{u,x}$  donc  $I_{u,x} \neq \emptyset$ .

— Soit  $(P, Q) \in I_{u,x}^2$ . On a

$$(P - Q)(u)(x) = P(u)(x) - Q(u)(x) = 0_E - 0_E = 0_E.$$

Donc  $(P - Q) \in I_{u,x}$ . On a montré que  $I_{u,x}$  est un sous-groupe du groupe  $(\mathbb{C}[X], +)$ .

— Soit  $P \in I_{u,x}$  et  $Q \in \mathbb{C}[X]$ ,  $PQ$  appartient à  $I_{u,x}$  en effet,

$$(PQ)(u)(x) = Q(u)(P(u)(x)) = Q(u)(0_E) = 0_E.$$

L'ensemble  $I_{u,x}$  est bien un idéal de  $\mathbb{C}[X]$ .

De plus si  $P \in I_u$  alors  $P(u)$  est l'application nulle donc  $P(u)(x) = 0$  et de ce fait  $P \in I_{u,x}$ .

On a bien  $I_u \subset I_{u,x}$ .

2) On sait que l'anneau  $\mathbb{C}[X]$  est principal. Comme  $I_{u,x}$  est un idéal non réduit à  $\{0\}$  (car il contient  $I_u$  qui n'est pas réduit à  $\{0\}$  car il contient  $\chi_u$ ), il existe un unique polynôme unitaire  $\mu_{u,x}$  tel que  $I_{u,x} = \mu_{u,x}\mathbb{C}[X]$ .

Maintenant,  $I_u \subset I_{u,x}$  donc, en particulier,  $\mu_u \in I_{u,x}$ . De ce fait  $\mu_{u,x}$  divise  $\mu_u$ .

3) a) Comme  $\chi_u = (X - 1)^2(X - 2)^2$ , le spectre de  $u$  est  $\text{Sp}(u) = \{1, 2\}$ .

— Calcul de  $E_1(u)$  : On détermine  $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ . On résout le système

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 2 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -6 & 3 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 2 \end{pmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_2 \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} && \begin{aligned} L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - L_1 \end{aligned} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} && \begin{aligned} L_3 &\leftarrow 2L_3 + 3L_2 \\ L_4 &\leftarrow 2L_4 + 5L_2 \end{aligned} \\
 &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système

$$\begin{cases} x - 3y + z = -t \\ 2y = t \\ 4z = 3t \end{cases}$$

On obtient  $E_1(u) = \text{Vect}((-1, 2, 3, 4))$ .

— Calcul de  $E_2(u)$  : On détermine  $\text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$ . On résout le système

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 2 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système

$$\begin{cases} -x + 2y = t \\ -2y = -z \end{cases}$$

On obtient  $E_2(u) = \text{Vect}((-1, 0, 0, 1), (2, 1, 2, 0))$ .

Le polynôme minimal de  $u$  divise  $\chi_u$  et 1 et 2 sont racines de  $\mu_u$ . On en déduit que  $\mu_u$  peut être  $(X-1)(X-2)$ ,  $(X-1)^2(X-2)$ ,  $(X-2)^2(X-1)$  ou  $(X-1)^2(X-2)^2$ . On vérifie aisément que  $(X-1)(X-2)$  n'annule pas  $A$  et que  $(X-1)^2(X-2)(A) = 0$  donc  $\mu_u = (X-1)^2(X-2)$ .

b) On a  $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $u(\varepsilon_1) = (1, 1, 1, 1)$  et  $u^2(\varepsilon_1) = (2, 1, 0, -1)$ . On pose

$$M = \text{Mat}(\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), u^2(\varepsilon_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice de rang 3. La famille  $\varepsilon_1, u(\varepsilon_1)$  et  $u^2(\varepsilon_1)$  est donc libre. De ce fait, il n'existe pas de polynôme (non nuls) de degré inférieur ou égal à 2 dans  $I_{u, \varepsilon_1}$ . Donc  $\mu_{u, \varepsilon_1}$  est de degré au moins 3 mais comme il divise  $\mu_u = (X-1)^2(X-2)$  on en déduit que  $\mu_{u, \varepsilon_1} = \mu_u$ .

c) Il suffit de prendre un vecteur propre. Par exemple  $x = (-1, 2, 3, 4)$ . On a  $u(x) = x$ , donc  $X-1 \in I_{u, x}$  ce qui implique que  $\mu_{u, x} = X-1$ .

d) L'idéal  $I_{u, 0_E}$  est  $\mathbb{C}[X]$  en entier. Il est engendré par 1 donc  $\mu_{u, 0_E} = 1$ .

4) a) Soit  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Supposons par l'absurde que  $\text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i} = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i-1}$ . Notons  $Q$  le polynôme  $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$  de telle sorte que  $\mu_u = (X - \lambda_i)^{\alpha_i} Q$ .

Pour tout  $x$  dans  $E$ ,

$$0_E = \mu_u(u)(x) = (u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}(Q(u)(x))$$

On en déduit que  $Q(u)(x) \in \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i} = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i-1}$  et donc

$$(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i-1}(Q(u)(x)) = \frac{\mu_u}{X - \lambda_i}(u)(x) = 0_E.$$

C'est-à-dire que  $\frac{\mu_u}{X - \lambda_i}$  est un polynôme annulateur de  $u$  ce qui est absurde car il est de degré strictement inférieur à  $\mu_u$ .

Il existe donc bien  $x_i \in \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i} \setminus \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i-1}$ .

- b) Par définition,  $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}(u)(x_i) = (u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}(x_i) = 0_E$ . Donc  $\mu_{u,x_i}$  divise  $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  mais comme  $(X - \lambda_i)^{\alpha_i-1}(u)(x_i) = (u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i-1}(x_i) \neq 0_E$ .

On a que  $\boxed{\mu_{u,x_i} = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}}$ .

- c) Soient  $i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ .

- Si  $i \neq j$  alors  $\mu_{u,x_i} = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  divise  $\frac{\mu_u}{X - \lambda_j}$  donc  $\frac{\mu_u}{X - \lambda_j}$  appartient à  $I_{u,x_i}$  ce qui implique que  $\left(\frac{\mu_u}{X - \lambda_j}\right)(u)(x_i)$  est nul.
- Si  $i = j$  alors  $\mu_{u,x_i} = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  ne divise pas  $\frac{\mu_u}{X - \lambda_j}$  donc  $\frac{\mu_u}{X - \lambda_j}$  n'appartient pas à  $I_{u,x_i}$  ce qui implique que  $\left(\frac{\mu_u}{X - \lambda_j}\right)(u)(x_i)$  n'est pas nul.

- d) On pose  $x = \sum_{i=1}^k x_i$ .

Pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,

$$\left(\frac{\mu_u}{X - \lambda_j}\right)(u)(x) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\mu_u}{X - \lambda_j}\right)(u)(x_i) = \left(\frac{\mu_u}{X - \lambda_j}\right)(u)(x_j) \neq 0_E.$$

On vient de voir qu'aucun diviseur de  $\mu_u$  de degré 1 de moins que  $\mu_u$  appartenait à  $I_{u,x}$  donc

$$\boxed{\mu_{u,x} = \mu_u}.$$

- e) L'endomorphisme  $u$  est diagonal et son polynôme minimal est  $\mu_u = (X - 1)(X - 2)$ .

On a donc,  $\lambda_1 = 1, \alpha_1 = 1, \lambda_2 = 2, \alpha_2 = 1$ .

Comme  $\text{Ker}(u - \text{id}_E)^0 = \{0_E\}$ , on cherche donc  $x_1 \in \text{Ker}(u - \text{id}_E) \setminus \{0_E\}$ . On peut prendre  $x_1 = \varepsilon_1$ .

De même on cherche  $x_2 \in \text{Ker}(u - 2\text{id}_E) \setminus \{0_E\}$ . On peut prendre  $x_2 = \varepsilon_2$ .

Il reste à poser  $\boxed{x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ .

# Problème II

## Partie I : Généralités

1) a) Soit  $S, T$  deux matrices de transition.

Soit  $x, z$  dans  $\mathbb{N}$ . Pour tout  $y \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq S(x, y)T(y, z) \leq S(x, y)$  car  $T(y, z) \in [0, 1]$ . On en déduit dans  $[0, +\infty]$

$$0 \leq ST(x, z) = \sum_{y \in \mathbb{N}} S(x, y)T(y, z) \leq \sum_{y \in \mathbb{N}} S(x, y) = 1$$

De plus, dans  $[0, +\infty]$ , par sommation par paquets

$$\sum_{z \in \mathbb{N}} ST(x, z) = \sum_{z \in \mathbb{N}} \left( \sum_{y \in \mathbb{N}} S(x, y)T(y, z) \right) = \sum_{y \in \mathbb{N}} S(x, y) \left( \sum_{z \in \mathbb{N}} T(y, z) \right) = \sum_{y \in \mathbb{N}} S(x, y) = 1$$

Cela montre que  $ST$  est une matrice de transition.

De même si  $\pi$  est une probabilité sur  $\mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{N}$  et tout  $y \in \mathbb{N}$ , comme  $S(x, y) \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq \pi(x)S(x, y) \leq \pi(x)$$

On en déduit que dans  $[0, +\infty]$ ,

$$0 \leq (\pi \cdot S)(y) = \sum_{x \in \mathbb{N}} \pi(x)S(x, y) \leq \sum_{x \in \mathbb{N}} \pi(x) = 1$$

La fonction  $\pi$  est bien définie et de plus, par sommation par paquets dans  $[0, +\infty]$

$$\sum_{y \in \mathbb{N}} (\pi \cdot S)(y) = \sum_{y \in \mathbb{N}} \left( \sum_{x \in \mathbb{N}} \pi(x)S(x, y) \right) = \sum_{x \in \mathbb{N}} \pi(x) \left( \sum_{y \in \mathbb{N}} S(x, y) \right) = \sum_{x \in \mathbb{N}} \pi(x) = 1$$

Cela montre que  $\pi \cdot S$  est une probabilité sur  $\mathbb{N}$ .

b) Soit  $S, T, R$  sont trois matrices de transition. Pour  $x, u$  dans  $\mathbb{N}$  par sommations par paquets dans  $[0, +\infty]$ ,

$$\begin{aligned} (ST)R(x, u) &= \sum_{z \in \mathbb{N}} ST(x, z)R(z, u) = \sum_{z \in \mathbb{N}} \sum_{y \in \mathbb{N}} S(x, y)T(y, z)R(z, u) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{N}} S(x, y) \sum_{z \in \mathbb{N}} T(y, z)R(z, u) = S(TR)(x, u) \end{aligned}$$

Cela montre que  $(ST)R = S(TR)$ .

2) a) La famille  $\left( \bigcap_{i=0}^{n-1} (X_i = x_i) \right)_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{N}^n}$  est un système complet d'événements. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n = x) &= \sum_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{N}^n} \mathbf{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) \\ &= \sum_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{N}^n} \mathbf{P}(X_0 = x_0)S(x_0, x_1)S(x_1, x_2) \cdots S(x_{n-1}, x) \end{aligned}$$

On en déduit que pour  $x, y \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_n = x, X_{n+1} = y) &= \sum_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{N}^n} \mathbf{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x, X_{n+1} = y) \\
&= \sum_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{N}^n} \mathbf{P}(X_0 = x_0) S(x_0, x_1) S(x_1, x_2) \cdots S(x_{n-1}, x) S(x, y) \\
&= S(x, y) \sum_{(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{N}^n} \mathbf{P}(X_0 = x_0) S(x_0, x_1) S(x_1, x_2) \cdots S(x_{n-1}, x) \\
&= \mathbf{P}(X_n = x) S(x, y)
\end{aligned}$$

b) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $y \in \mathbb{N}$ . Comme  $((X_n = x))_{x \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales

$$\pi_{n+1}(y) = \mathbf{P}(X_{n+1} = y) = \sum_{x \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(X_n = x, X_{n+1} = y) = \sum_{x \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(X_n = x) S(x, y) = (\pi_n \cdot S)(y)$$

Cela montre que  $\pi_{n+1} = \pi_n \cdot S$ .

Par une récurrence immédiate  $\pi_n = \pi_0 \cdot S^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3) a) Pour  $x, y \in \mathbb{N}$ ,  $S(x, y) \in [0, 1]$ .

Soit  $x \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{y \in \mathbb{N}} S(x, y) = S(x, 0) + S(x, x+1) = 1 - p + p = 1$$

La matrice  $S$  est bien une matrice de transition sur  $\mathbb{N}$ .

b) On a montré que  $\pi_1 = \pi_0 \cdot S$ . On en déduit que pour tout  $y \in \mathbb{N}$ ,

$$\pi_1(y) = \sum_{x \in \mathbb{N}} \pi_0(x) S(x, y) = S(0, y)$$

On en déduit que  $\pi_1(0) = S(0, 0) = (1 - p)$ ,  $\pi_1(1) = S(0, 1) = p$  et  $\pi_1(x) = 0$  pour  $x > 1$ .

De même pour tout  $y \in \mathbb{N}$ ,

$$\pi_2(y) = \sum_{x \in \mathbb{N}} \pi_1(x) S(x, y) = \pi_1(0) S(0, y) + \pi_1(1) S(1, y)$$

On en déduit que  $\pi_2(0) = S(0, 0) = (1 - p)^2 + (1 - p)p = (1 - p)$ ,  $\pi_2(1) = p(1 - p)$ ,  $\pi_2(2) = p^2$  et  $\pi_2(x) = 0$  pour  $x > 2$ .

Notons alors  $q = 1 - p$ . Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\pi_n : x \mapsto \begin{cases} qp^x & \text{si } x < n \\ p^n & \text{si } x = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les exemples ci-dessus montrent que la propriété est vraie pour  $n = 0, 1, 2$ .

Supposons que la propriété est vraie pour un entier  $n$  et calculons  $\pi_{n+1}$ .

Soit  $y > 0$ ,

$$\pi_{n+1}(y) = \sum_{x \in \mathbb{N}} \pi_n(x) S(x, y) = \pi_n(y-1)p$$

Cela montre que  $\pi_{n+1}(y) = qp^y$  si  $y < n+1$  et  $\pi_{n+1}(n+1) = p^{n+1}$ . De plus

$$\pi_{n+1}(0) = \sum_{x \in \mathbb{N}} \pi_n(x) S(x, 0) = q \sum_{x \in \mathbb{N}} \pi_n(x) = q$$

On en déduit que pour tout  $x \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} qp^x$ .

## Partie II : Récurrence d'une chaîne de Markov

4) Soit  $x \in \mathbb{N}^*$ ,  $(S_+ \odot u)(x) \geq 0$  comme somme de termes positifs.

De plus comme pour tout  $y \in \mathbb{N}^*$ ,  $u(y) \leq 1$ ,

$$(S_+ \odot u)(x) = \sum_{y \in \mathbb{N}^*} S_+(x, y)u(y) \leq \sum_{y \in \mathbb{N}^*} S_+(x, y) \leq 1$$

5) Par continuité décroissante pour la probabilité  $\mathbf{P}_{(X_0=x)}$ ,

$$u_\infty(x) = \mathbf{P}_{(X_0=x)} \left( \bigcap_{n \geq 1} (X_n \in \mathbb{N}^*) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_{(X_0=x)} \left( \bigcap_{k=1}^n (X_k \in \mathbb{N}^*) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$$

6) Soit  $x, y$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

Montrons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que pour  $n \geq 0$ ,

$$\mathbf{P}(X_0 = x)S_+^n(x, y) = \mathbf{P}((X_0 = x) \cap U_{n-1} \cap (X_n = y))$$

— Initialisation. Pour  $n = 0$ ,  $S_+^0 = I$  et  $U_{-1} = \Omega$ . On en déduit que

$$\mathbf{P}((X_0 = x) \cap U_{-1} \cap (X_0 = y)) = \delta_{x,y} \mathbf{P}(X_0 = x) = \mathbf{P}(X_0 = x)I(x, y)$$

— Hérité. Soit  $n \geq 0$ . On suppose la propriété vraie au rang  $n$ . On voit que

$$U_n \cap (X_{n+1} = y) = \bigcup_{x_n \in \mathbb{N}^*} U_{n-1} \cap (X_n = x_n) \cap (X_{n+1} = y)$$

Les événements de l'union de droite étant disjoints,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}((X_0 = x) \cap U_n \cap (X_{n+1} = y)) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n} \mathbf{P}(X_0 = x, X_1 = x_1 = \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = y) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n} \mathbf{P}(X_0 = x)S_+(x, x_1) \cdots S_+(x_{n-1}, x_n)S_+(x_n, y) \\ &= \sum_{x_n \in \mathbb{N}^*} \left( \sum_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}} \mathbf{P}(X_0 = x)S_+(x, x_1) \cdots S_+(x_{n-2}, x_{n-1}) \right) S_+(x_n, y) \\ &= \sum_{x_n \in \mathbb{N}^*} \left( \sum_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}} \mathbf{P}(X_0 = x, X_1 = x_1 = \dots, X_n = x_n) \right) S_+(x_n, y) \\ &= \sum_{x_n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}((X_0 = x) \cap U_{n-1} \cap (X_n = x_n))S_+(x_n, y) \\ &= \mathbf{P}(X_0 = x) \sum_{x_n \in \mathbb{N}^*} S_+^n(x, x_n)S_+(x_n, y) \\ &= \mathbf{P}(X_0 = x)S_+^{n+1}(x, y) \end{aligned}$$

La propriété voulue est démontrée par récurrence.

On voit alors que

$$U_n = \bigcup_{y \in \mathbb{N}^*} (U_{n-1} \cap (X_n = y))$$

Les événements étant deux à deux disjoints,

$$\mathbf{P}((X_0 = x) \cap U_n) = \sum_{y \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}((X_0 = x) \cap U_{n-1} \cap (X_n = y)) = \mathbf{P}(X_0 = x) \sum_{y \in \mathbb{N}^*} S_+(x, y)$$

En divisant par  $\mathbf{P}(X_0 = x)$  qui est supposé non nul,

$$u_n(x) = \sum_{y \in \mathbb{N}^*} S_+^n(x, y)$$

7) Soit  $x \in \mathbb{N}^*$ , par sommation par paquets,

$$u_{n+1}(x) = \sum_{y \in \mathbb{N}^*} S_+^{n+1}(x, y) = \sum_{y \in \mathbb{N}^*} \sum_{z \in \mathbb{N}^*} S_+(x, z) S_+^n(z, y) = \sum_{z \in \mathbb{N}^*} S_+(x, z) \sum_{y \in \mathbb{N}^*} S_+^n(z, y) = \sum_{z \in \mathbb{N}^*} S_+(x, z) u_n(z)$$

On a donc  $u_{n+1}(x) = (S_+ \odot u_n)(x)$ .

Finalement  $u_{n+1} = S_+ \odot u_n$ .

8) Soit  $x \in \mathbb{N}^*$  fixé. On pose pour  $y \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_y : n \mapsto S_+(x, y) u_n(y)$ . Comme  $u_n(y) \in [0, 1]$ ,  $\|f_y\|_\infty \leq S_+(x, y)$ . On en déduit que la série  $\sum_{y \geq 0} \|f_y\|_\infty$  converge. La série de fonctions  $\sum_y f_y$  converge normalement donc uniformément sur  $\mathbb{N}$ .

De plus, pour tout  $y \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_y(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S_+(x, y) u_\infty(y)$  par la question 5). En appliquant le théorème de double limite on obtient que

$$u_\infty(x) = \sum_{y \in \mathbb{N}^*} S_+(x, y) u_\infty(y) = (S_+ \odot u_\infty)(x)$$

On a bien montré que  $u_\infty = S_+ \odot u_\infty$ .

9) Soit  $v : \mathbb{N}^* \rightarrow [0, 1]$  une fonction vérifiant  $v = S_+ \odot v$ . Par définition, pour tout  $x \in \mathbb{N}^*$ ,  $v(x) \leq 1 = u_0(x)$  donc  $v \leq u_0$ . Or, de manière générale si  $w, w'$  sont deux fonctions à valeurs dans  $[0, 1]$  telles que  $w \leq w'$  alors  $S \odot w \leq S \odot w'$  car pour  $x \in \mathbb{N}$ ,

$$(S \odot w)(x) = \sum_{y \in \mathbb{N}^*} S_+(x, y) w(y) \leq \sum_{y \in \mathbb{N}^*} S_+(x, y) w'(y) = (S_+ \odot w')(x)$$

On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v \leq u_n$ . En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient que  $v \leq u_\infty$ .

### Partie III : Processus de naissance et de mort

10) Soit  $x \in \mathbb{N}$ , par définition d'une matrice transition, avec la convention choisie,

$$S(x, x) = 1 - S(x, x+1) - S(x, x-1) = 1 - \lambda_x - \mu_x$$

11) On a vu à la question 8) que  $u_\infty = S_+ \odot u_\infty$ . Avec les notations de cette partie on obtient que pour tout  $x \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_\infty(x) = \sum_{y \in \mathbb{N}^*} S_+(x, y) u_\infty(y) = \lambda_x u_\infty(x+1) + \mu_x u_\infty(x-1) + (1 - \lambda_x - \mu_x) u_\infty(x)$$

En convenant pour le cas  $x = 1$  que  $u_\infty(0) = 0$ .

On en déduit que  $\lambda_x(u_\infty(x+1) - u_\infty(x)) - \mu_x(u_\infty(x) - u_\infty(x-1)) = 0$  puis, comme  $\lambda_x \neq 0$

$$u_\infty(x+1) - u_\infty(x) = \frac{\mu_x}{\lambda_x}(u_\infty(x) - u_\infty(x-1))$$

Montrons maintenant par récurrence que pour tout  $x \in \mathbb{N}^*$

$$u(x) = u(1) \sum_{i=0}^{x-1} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i}$$

- Initialisation. Pour  $x = 1$ , la somme du terme de droite se réduit au cas  $i = 0$  qui vaut 1 car c'est un produit vide.
- Hérédité. On suppose la propriété vraie au rang  $x \geq 1$ . On a alors en utilisant la formule ci-dessus,

$$\begin{aligned} u_\infty(x+1) &= u_\infty(x) + \frac{\mu_x}{\lambda_x}(u_\infty(x) - u_\infty(x-1)) \\ &= u_\infty(1) \sum_{i=0}^{x-1} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i} + u_\infty(1) \frac{\mu_x}{\lambda_x} \left( \sum_{i=0}^{x-1} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i} - \sum_{i=0}^{x-2} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i} \right) \\ &= u_\infty(1) \sum_{i=0}^{x-1} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i} + u_\infty(1) \frac{\mu_x}{\lambda_x} \left( \frac{\mu_1 \cdots \mu_{x-1}}{\lambda_1 \cdots \lambda_{x-1}} \right) \\ &= u_\infty(1) \sum_{i=0}^x \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i} \end{aligned}$$

La propriété est bien vérifiée par récurrence.

- 12) a) Supposons par l'absurde que  $u_\infty(1) > 0$ .

Alors, comme  $A = +\infty$ , il existe  $x \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u_\infty(1) \sum_{i=0}^x \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i} > 1$ . C'est absurde car  $u_\infty$  est une fonction à valeurs dans  $[0, 1]$ . On en déduit que  $u_\infty(1) = 0$  et donc  $u_\infty = \tilde{0}$ .

- b) On utilise le système complet d'événements  $(X_0 = x)_{x \in \mathbb{N}}$ . La formule des probabilités totales donne que

$$\mathbf{P}(U_\infty) = \sum_{x \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(X_0 = x) P_{(X_0=x)}(U_\infty) = \sum_{x \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(X_0 = x) u_\infty(x) = 0$$

- c) On vient de montrer que  $\mathbf{P}(\bigcap_{n \geq 0} (X_n \in \mathbb{N}^*)) = 0$ . La chaîne de Markov étant homogène, pour tout entier  $N \in \mathbb{N}$ , la suite  $(X_n)_{n \geq N}$  est aussi une chaîne de Markov homogène ayant la même matrice de transition. On en déduit que  $\mathbf{P}(\bigcap_{n \geq N} (X_n \in \mathbb{N}^*)) = 0$ . Une réunion dénombrable d'événements négligeables est négligeable donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} (X_n \in \mathbb{N}^*)\right) = 0$$

En passant au complémentaire  $\mathbf{P}(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} (X_n = 0)) = 1$ .

- 13) On suppose que  $A < +\infty$ . La fonction  $u_\infty$  est à valeurs dans  $[0, 1]$  donc, pour tout  $x \in \mathbb{N}$ ,

$$u_\infty(1) \sum_{i=0}^{x-1} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i} \leq 1$$

En passant à la limite quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $u_\infty(1) \leq \frac{1}{A}$ .

Réciproquement, on considère la fonction  $v$  définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$v : x \mapsto \frac{1}{A} \sum_{i=0}^{x-1} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i}$$

Elle est à valeurs dans  $[0, 1]$  et en remontant les calculs de la question 11) elle vérifie  $S_+ \odot v = v$ .

D'après la question 9),  $v \leq u_\infty$ . En particulier  $u_\infty(1) \geq v(1) = \frac{1}{A}$ .

On en déduit que  $u_\infty(1) = \frac{1}{A}$  et donc que pour tout  $x \in \mathbb{N}$ ,

$$u_\infty(x) = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^{x-1} \frac{\mu_1 \cdots \mu_i}{\lambda_1 \cdots \lambda_i}$$

14) a) On suppose qu'il existe  $\pi_\infty$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_n(x)$ .

C'est-à-dire  $\pi_{n+1}(x) = S(x-1, x)\pi_n(x-1) + S(x, x)\pi_n(x) + S(x+1, x)\pi_n(x+1)$ .

En faisant tendre vers  $+\infty$  on obtient que  $\pi_\infty(x) = S(x-1, x)\pi_\infty(x-1) + S(x, x)\pi_\infty(x) + S(x+1, x)\pi_\infty(x+1)$ . On a donc  $\pi_\infty = \pi_\infty \cdot S$ .

Pour  $x \geq 1$  on obtient

$$\pi_\infty(x) = \lambda_{x-1}\pi_\infty(x-1) + (1 - \lambda_x - \mu_x)\pi_\infty(x) + \mu_{x+1}\pi_\infty(x+1)$$

Cela peut s'écrire

$$\pi_\infty(x+1) = \frac{1}{\mu_{x+1}} ((\lambda_x + \mu_x)\pi_\infty(x) - \lambda_{x-1}\pi_\infty(x-1))$$

Ce résultat est encore vrai pour  $x = 0$  si on convient que  $\lambda_{-1} = 0$ .

On démontre alors par récurrence comme à la question 11) que nécessairement pour tout  $x > 0$ ,

$$\pi_\infty(x) = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{x-1}}{\mu_1 \cdots \mu_x} \pi_\infty(0)$$

Comme  $\pi_\infty$  est une probabilité, on doit avoir

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} < +\infty$$

Dans ce cas,

$$\pi_\infty : x \mapsto \frac{1}{\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i}} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{x-1}}{\mu_1 \cdots \mu_x}$$

b) Avec nos hypothèses, pour tout  $i \geq 0$ ,  $\frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} = \left(\frac{p}{q}\right)^i$ . La série de terme général  $\sum_{i \geq 0} \left(\frac{p}{q}\right)^i$  converge car  $p < q$  et

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{p}{q}} = \frac{q}{q-p}$$

On a alors

$$\pi_\infty(x) = \frac{q}{q-p} \left(\frac{p}{q}\right)^x$$