L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.
Les deux problèmes sont indépendants

Problème I

Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ soit une base de l'espace vectoriel E.
Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes. Les deux premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la troisième partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique. Pour finir, on étudie le commutant d'un endomorphisme cyclique dans la dernière partie.

Partie 1

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

1) Montrer que $g^2 = g + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
2) En déduire que l'endomorphisme g n'est pas cyclique.
3) Montrer que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

Partie 2

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Par exemple, on a $\Delta\left(X^2\right) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$

4) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\Delta\left(X^k\right)$ sous une forme développée.
6) Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.
7) En déduire que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie 3

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.
Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de h. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k.
Soit $v \in E$. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

8) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

9) Montrer que le déterminant de la famille $\mathscr{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$ dans la base $\mathscr{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

10) Conclure que h est cyclique si et seulement s'il admet n valeurs propres distinctes.

Partie 4

Dans cette partie, on fixe un endomorphisme cyclique f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On note $v \in E$ tel que la famille $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ soit une base de l'espace vectoriel E.
On considère alors g un endomorphisme de E qui commute à f c'est-à-dire qu'il vérifie que $f \circ g = g \circ f$.

11) Justifier qu'il existe $(\beta_0, \dots, \beta_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$g(v) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i f^i(v)$$

12) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$g(f^k(v)) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i f^{k+i}(v)$$

13) Montrer que $g \in \mathbb{C}[f]$.

Problème II

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0, la file contient un unique client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbf{N}^*$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.
Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.
On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n = 1$, etc.

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1. On pose donc $T_1 : \Omega \to \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$ où pour $\omega \in \Omega$,

$$T_1(\omega) = \begin{cases} k & \text{si } \min\{i \in \mathbf{N}^* \ , \ X_i(\omega) = 1\} = k \\ +\infty & \text{si pour tout } i \in \mathbf{N}^*,\ X_i(\omega) = 0 \end{cases}$$

Les trois premières questions sont des résultats de cours qu'il s'agit de redémontrer.

1) Soit $k \in \mathbf{N}^*$, exprimer $(T_1 = k)$ en fonction des événements $((X_i = 1))_{i\in\mathbf{N}^*}$. Exprimer de même $(T_1 = +\infty)$ en fonction de ces mêmes événements.
2) En déduire que T_1 est une variable aléatoire discrète puis que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}\, p$.
3) Déterminer $\mathbf{P}(T_1 = +\infty)$. Interpréter ce dernier résultat.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et l'arrivée du client d'indice n. On admet que les variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont indépendantes suivent la même loi que T_1.
On note $D_n = T_1 + \cdots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.

4) Determiner la loi de D_2.
5) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pourra procéder par récurrence. Ou pas.

Partie II - Une suite récurrente

Soit $a > 0$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f : x \mapsto \exp(a(x-1))$.
On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$z_1 \in]0,1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ z_{n+1} = f(z_n).$$

6) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $z_n \in]0,1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe au sens strict ($< 0\,; = 0\,; > 0$) que $z_2 - z_1$.

7) En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

8) Soit la fonction $\psi :]0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $\psi : x \mapsto \ln(x) - a(x-1)$.
Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, on a : $\big(\ 0 \leqslant \psi(x) \iff f(x) \leqslant x\ \big)$ et $\big(\ \psi(x) = 0 \iff f(x) = x\ \big)$.

9) On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$.
En déduire que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

10) On suppose dans cette question que $a > 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0,1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.
En distinguant les cas $z_1 \in]0,\alpha]$ et $z_1 \in]\alpha,1[$, montrer que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

Partie III - Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On considère donc une suite $(S_k)_{k\geqslant 0}$ de variables aléatoires suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ où S_k représente le temps du service du client d'indice k. On suppose que la famille composée des variables aléatoires $(S_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et des variables $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.
On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0.
On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.
Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe étaient servis.
Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k le nombre de clients du k-ième groupe. On admet que V_k est une variable aléatoire discrète.
On remarquera que par construction, pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $\omega \in \Omega$, si $V_n(\omega) = 0$ alors $V_k(\omega) = 0$ pour tout $k \geqslant n$.

11) Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} (V_n = 0)$?

12) Pour tout $(n,i) \in \mathbf{N}^2$, calculer $\mathbf{P}(V_1 = i \mid S_0 = n)$.

13) En déduire que V_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

14) On note $z_n = \mathbf{P}(V_n = 0)$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et que $\mathbf{P}(Z) = \lim_{n\to+\infty} z_n$.

On admet que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $j \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = j) = \mathbf{P}(V_n = 0)^j$.

15) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $z_{n+1} = \exp(\lambda p(z_n - 1))$.

16) Déterminer, suivant les valeurs de λp, la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Interpréter.