

Problème I

Partie 1

1)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = M + 2I_3$$

donc $\boxed{g^2 = g + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$0_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}(x) = (g^2 - g - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3})(x) = g^2(x) - 2g(x) - x$$

donc $(x, g(x), g^2(x))$ est liée (car 1, 2, -1 sont non tous nuls) et n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi $\boxed{g \text{ n'est pas cyclique}}$.

3) M est annulée par $P = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$, qui est scindé à racines simples. Donc la matrice $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$.

De plus le polynôme minimal μ_M de M divise P et est unitaire. Donc $\mu_M \in \{1, X + 1, X - 2, (X + 1)(X - 2)\}$.

Comme aucun des trois premiers polynômes de cette liste n'annule M , on a $\mu_M = (X + 1)(X - 2)$. Comme le spectre de M est l'ensemble des racines de son polynôme minimal, on a $\boxed{\text{Sp}(M) = \{-1, 2\}}$

Partie 2

4) L'application Δ est linéaire par linéarité à droite de la composition.

De plus pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P \circ (X + 1)$ a même degré que P donc $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ comme différence de deux polynômes de degré au plus n .

Ainsi $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

5) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\boxed{\Delta(X^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i}$$

6) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant c'est-à-dire de degré $d \geq 1$.

Alors P s'écrit $a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$ avec $a_d \neq 0$.

Par linéarité de Δ ,

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^d a_k \Delta(X^k) = \sum_{k=0}^d \sum_{i=0}^{k-1} a_k \binom{k}{i} X^i = \sum_{(i,k), 0 \leq i < k \leq d} a_k \binom{k}{i} X^i = \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{k=i+1}^d a_k \binom{k}{i} X^i$$

Ainsi $\boxed{\Delta(P) \text{ est de degré } d-1}$ car le coefficient de X^{d-1} dans $\Delta(P)$ est $\sum_{k=d}^d a_k \binom{k}{d-1} = da_d \neq 0$.

- 7) Si P est de degré n alors par récurrence immédiate on a pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ $\deg(\Delta^k(P)) = n - k$. Ainsi les degrés de $P, \Delta(P), \dots, \Delta^n(P)$ sont deux à deux distincts et distincts de $-\infty$, donc ces polynômes forment une famille libre. Cette famille étant de longueur $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

L'endomorphisme Δ est donc cyclique.

Partie 3

- 8) La propriété

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

est vraie pour $p = 0$ car $\lambda_1^0 = \dots = \lambda_n^0 = 1$.

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vérifiée au rang p .

Alors par linéarité de h :

$$h^{p+1}(v) = \alpha_1 \lambda_1^p h(v_1) + \dots + \alpha_n \lambda_n^p h(v_n) = \alpha_1 \lambda_1^{p+1} v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^{p+1} v_n$$

Ainsi par récurrence la propriété est vraie à tout ordre.

- 9)

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n \lambda_n & \dots & \alpha_n \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Par multilinéarité par rapport aux lignes on peut factoriser la première ligne par α_1 , la seconde par α_2 , etc... Ainsi

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \dots \alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \alpha_1 \dots \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

par la formule sur les déterminants de Vandermonde.

- 10) $\Leftarrow$ Supposons que h admet n valeurs propres distinctes. Posons $v = v_1 + \dots + v_n$. D'après la formule précédente appliquée au cas où $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$, il vient

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

Donc $\mathcal{F}$ est une base de E et ainsi h est cyclique.

$\Rightarrow$ Prouvons la réciproque par contraposée. Supposons que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ne soient pas deux à deux distincts.

Alors pour tout choix de v dans E on a

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \dots \alpha_n \cdot 0 = 0$$

donc $\mathcal{F}$ n'est pas une base de E . Ainsi h n'est pas cyclique.

Partie 4

11) Il existe $(\beta_0, \dots, \beta_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$g(v) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i f^i(v)$$

car $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ est une base de E (donc engendre E).

12) Comme g commute avec f , il commute aussi avec toutes les puissances de f et ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$g(f^k(v)) = f^k(g(v)) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i f^k(f^i(v)) = \boxed{\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i f^{k+i}(v)}$$

13) Posons $h = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i f^i$.

Par la question précédente les applications g et h co'incident en $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$, qui forment une base de E .

Comme g et h sont linéaires, elles sont égales. Comme $h \in \mathbb{C}[f]$, on a $\boxed{g \in \mathbb{C}[f]}$.

Problème II

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

- 1) cf cours sur la loi géométrique
- 2) idem
- 3) idem
- 4) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a, en posant $q = 1 - p$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(D_2 = k) &= \sum_{i,j \geq 1, i+j=k} \mathbf{P}(T_1 = i, T_2 = j) \\
 &= \sum_{i,j \geq 1, i+j=k} \mathbf{P}(T_1 = i) \mathbf{P}(T_2 = j) \quad \text{car } T_1 \text{ et } T_2 \text{ sont indépendantes} \\
 &= \sum_{i,j \geq 1, i+j=k} q^{i-1} p q^{j-1} p \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} q^{k-2} p^2 \\
 &= \boxed{(k-1)q^{k-2}p^2}
 \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{P}(D_2 = \infty) = \mathbf{P}((T_1 = \infty) \cup (T_2 = \infty)) \leq \mathbf{P}(T_1 = \infty) + \mathbf{P}(T_2 = \infty) = 0$$

donc

$$\boxed{\mathbf{P}(D_2 = \infty) = 0}$$

- 5) Par le même raisonnement on a pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(D_n = k) = \text{Card}(A) q^{k-n} p^n$$

où $A = \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^*, i_1 + \dots + i_n = k\}$.

Or A est équipotent à l'ensemble des parties à $n-1$ éléments de $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$ via l'application $(i_1, \dots, i_n) \mapsto \{i_1, i_1 + i_2, \dots, i_1 + i_2 + \dots + i_{n-1}\}$ de réciproque $B \mapsto (\min(B), \min(B \setminus \{\min(B)\}) - \min(B), \dots)$ et ainsi $\text{Card}(A) = \binom{k-1}{n-1}$.

On peut aussi procéder par récurrence. La propriété est vraie au rang 1 car T_1 suit la loi géométrique de paramètre p et $\binom{k-1}{1-1} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que D_n suive la loi de l'énoncé.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(D_n = k) &= \sum_{i,j \geq 1, i+j=k} \mathbf{P}(D_n = i, T_{n+1} = j) \\
 &= \sum_{i,j \geq 1, i+j=k} \mathbf{P}(D_n = i) \mathbf{P}(T_{n+1} = j) \quad \text{car } D_n \text{ et } T_{n+1} \text{ sont indépendantes} \\
 &\quad \text{par le lemme des coalitions} \\
 &= \sum_{i,j \geq 1, i+j=k} \binom{i-1}{n-1} p^n q^{i-n} q^{j-1} p \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} \binom{i-1}{n-1} p^{n+1} q^{k-n-1}
 \end{aligned}$$

et on conclut en utilisant la formule de la gouttière / chaussette de Noël / crosse de hockey :

$$\sum_{i=1}^{k-1} \binom{i-1}{n-1} = \binom{k}{n}$$

qui se démontre par récurrence sur k .

Partie II - Une suite récurrente

- 6) La fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ et $f(0) = \exp(-a) \geq 0$ et $f(1) = 1$, donc $f(]0, 1[) \subset]0, 1[$.

Par récurrence immédiate, $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, z_n \in]0, 1[}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $z_{n+2} - z_{n+1} = f(z_{n+1}) - f(z_n)$ est du même signe au sens strict que $z_{n+1} - z_n$ car f croît strictement. Par récurrence immédiate $z_{n+1} - z_n$ est du même signe au sens strict que $z_2 - z_1$.

- 7) Par la question précédent, (z_n) est monotone et bornée. Donc $\boxed{\text{elle converge}}$ et sa limite ℓ est, par passage aux limites dans les inégalités larges, $\boxed{\text{dans } [0, 1]}$.

De plus la suite (z_{n+1}) converge vers ℓ d'une part (suite extraite) et vers $f(\ell)$ d'autre part par continuité de f . Donc par unicité de la limite, $\boxed{f(\ell) = \ell}$.

- 8) Soit $x \in]0, 1[$. On a :

$$f(x) - x = \exp(a(x-1)) - \exp(\ln x)$$

qui, par croissance stricte de $\exp$, est du même signe au sens strict que $a(x-1) - \ln x = -\psi(x)$.

- 9) On suppose dans cette question que $a \leq 1$.

Pour tout $x \in]0, 1[$, $\psi'(x) = \frac{1}{x} - a > 1 - a \geq 0$ et ψ est continue sur $]0, 1[$ donc ψ est strictement croissante sur $]0, 1[$. De plus $\psi(1) = 0$.

Donc ψ est strictement négative sur $]0, 1[$ et ainsi ne s'annule qu'en 1 sur $]0, 1[$.

Comme $\ell \in [0, 1]$ et $f(\ell) = \ell$ et $\ell \neq 0$ car $\underline{f(0) \neq 0}$, on a $\psi(\ell) = 0$ et donc $\boxed{\ell = 1}$.

- 10) On suppose dans cette question que $a > 1$.

La dérivée de ψ est du même signe au sens strict que $x \mapsto \frac{1}{a} - x$ donc ψ est strictement croissante sur $]0, \frac{1}{a}[$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{a}, 1]$.

De plus $\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ et $\psi(1) = 0$ et ψ est continue.

Donc $\psi(1/a) > 0$ et ψ réalise une bijection de $]0, \frac{1}{a}[$ vers $] -\infty, \psi(a)]$ et une bijection de $[\frac{1}{a}, 1]$ vers $[0, \psi(a)]$.

Ainsi ψ s'annule exactement deux fois sur $]0, 1]$, en 1 et en un point $\alpha \in]0, \frac{1}{a}[\subset]0, 1[$. Donc $\ell = \alpha$ ou $\ell = 1$ (car $\ell \neq 0$, voir plus haut).

Pour tout $x \in [0, \alpha]$ on a $\alpha \geq f(x) \geq x$ et pour tout $x \in [\alpha, 1]$ on a $\alpha \leq f(x) \leq x$.

Si $z_1 \leq \alpha$ on a par récurrence immédiate que (z_n) est à termes dans $[0, \alpha]$ et ainsi $\ell \leq \alpha$ par passage aux limites dans les inégalités larges, donc $\ell \neq 1$ et ainsi $\boxed{\ell = \alpha}$.

Si $z_1 \geq \alpha$ on a par récurrence immédiate que (z_n) est à termes dans $[\alpha, 1]$ et donc décroissante, et ainsi par passage aux limites dans les inégalités larges $\ell \leq z_1 < 1$ et ainsi $\boxed{\ell = \alpha}$.

Partie III - Groupes de clients

- 11) Z est l'événement "il existe un instant où aucun client n'attend c'est-à-dire où la file d'attente est vide"

Ce qui n'empêchera pas cette file de se regarnir ultérieurement, l'événement Z ne signifie pas un arrêt de l'écoulement inexorable du temps. Il faut comprendre que les clients ultérieurs ne seront plus considérés comme faisant partie d'un "groupe de client" au sens de l'énoncé.

12)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(V_1 = i \mid S_0 = n) &= \frac{P(X_1 + \dots + X_n = i, S_0 = n)}{\mathbf{P}(S_0 = n)} \\
 &= \mathbf{P}(X_1 + \dots + X_n = i) \quad \text{car } X_1 + \dots + X_n \text{ et } S_0 \text{ sont} \\
 &\hspace{15em} \text{indépendants par le lemme des coalitions} \\
 &= \mathcal{B}(n, p)(\{i\}) \\
 &= \boxed{\binom{n}{i} p^i q^{n-i}}
 \end{aligned}$$

- 13) Par la formule des probabilités totales, on a pour tout $i \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(V_1 = i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(V_1 = i \mid S_0 = n) P(S_0 = n) \\
 &= \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=i}^{\infty} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
 &= e^{-\lambda} \frac{p^i}{i!} \sum_{n=i}^{\infty} \frac{q^{n-i}}{(n-i)!} \lambda^{n-i} \lambda^i \\
 &= e^{-\lambda} \frac{p^i}{i!} e^{\lambda q} \lambda^i \\
 &= \boxed{e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}}
 \end{aligned}$$

Donc V_1 suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

- 14) On note $z_n = \mathbf{P}(V_n = 0)$.

D'après la remarque de l'énoncé, la suite $((V_n = 0))_{n \geq 1}$ est croissante au sens de l'inclusion donc par continuité croissante :

$$\boxed{z_n = \mathbf{P}(V_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\cup_{n \in \mathbf{N}^*} (V_n = 0)) = \mathbf{P}(Z)}$$

15)

$$\begin{aligned}
 z_{n+1} &= \mathbf{P}(V_{n+1} = 0) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(V_{n+1} = 0 \mid V_1 = j) \mathbf{P}(V_1 = j) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}(V_n = 0)^j \mathbf{P}(V_1 = j) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} z_n^j e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \\
 &= e^{-\lambda p} e^{\lambda p z_n} \\
 &= \boxed{e^{\lambda p(z_n - 1)} = f(z_n)}
 \end{aligned}$$

- 16) D'après les questions 9) et 10), la suite (z_n) converge vers 1 si $\lambda p \leq 1$ et on converge vers α si $\lambda p > 1$.

Autrement dit, l'événement "il y aura un instant où la file d'attente sera vide" est presque certain si $\lambda p \leq 1$. Ce qui correspond à un temps de service pas trop long (λ pas trop grand) en regard de la probabilité d'arrivée d'un nouveau client à chaque instant.

Dans le cas contraire, il n'est pas presque sûr que la file se videra un jour. Toutefois l'événement n'a pas une probabilité nulle. Que chaque client en attente se rassure, il est presque certain d'être servi. Par contre l'employé derrière le comptoir aura une probabilité non nulle de n'avoir jamais de pause. Bien que la probabilité d'en avoir une ne soit pas nulle...