Théorème (Sommation par paquets - cas complexe)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée sur un ensemble I. Soit $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I.

1. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si
   - Pour tout $j \in J$, la famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable.
   - La famille $\left(\sum_{i\in I_j} |u_i|\right)_{j\in J}$ est sommable.
2. Dans ce cas,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)$$

Démonstration :

1. Commençons par la partie sur la sommabilité. D'après le théorème de sommation par paquets pour les réels positifs, dans $[0, +\infty]$,

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} |u_i|\right) = \sum_{i\in I} |u_i|$$

   Comme la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable, on obtient le résultat voulu.

2. On suppose maintenant que la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.
   Commençons par montrer que l'on peut approcher la somme de la famille par la somme d'une famille finie.

Lemme

Soit $(u_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J \subset I$ tel que pour tout $F \subset I$ contenant J,

$$\left|\sum_{i\in F} u_i - \sum_{i\in FI} u_i\right| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration du lemme : Traitons le cas des familles réelles. On sait que la famille $(u_i^+)_{i\in I}$ est sommable. En particulier

$$\sum_{i\in I} u_i^+ = \sup\left\{\sum_{i\in K} u_i^+ \mid K \text{ fini}\right\}$$

Par définition de la borne supérieure, il existe une partie finie K^+ telle que

$$\sum_{i\in K^+} u_i^+ \geqslant \sum_{i\in I} u_i^+ - \varepsilon$$

Notons que cette inégalité est toujours vraie pour toute partie T contenant K^+. De même, il existe une partie K^- telle que
$$\sum_{i\in K^-} u_i^- \geqslant \sum_{i\in I} u_i^- - \varepsilon$$
On pose alors $J = K^+ \cup K^-$. Toute partie F contenant F vérifie que
$$\sum_{i\in I} u_i^+ - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in F} u_i^+ \leqslant \sum_{i\in I} u_i^+ \quad \text{et}\infty\infty\infty \quad \sum_{i\in I} u_i^- - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in F} u_i^- \leqslant \sum_{i\in I} u_i^-$$
En faisant la différence on obtient bien que
$$\left|\sum_{i\in F} u_i - \sum_{i\in FI} u_i\right| \leqslant \varepsilon$$

□

On va montrer en utilisant le théorème d'approximation, que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)\right| \leqslant 2\varepsilon$$
On fixe $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $T \subset I$ un ensemble fini tel que pour tout T' contenant T,
$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in T'} u_i\right| \leqslant \varepsilon$$
De plus, par inégalité triangulaire, pour tout $j \in J$, $\left|\sum_{i\in I_j} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I_j} |u_i|$ ce qui montre que la famille $\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable. Il existe donc $G \subset J$ un ensemble fini tel que pour tout G' contenant G, $\left|\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) - \sum_{j\in G}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)\right| \leqslant \varepsilon$
Quitte à ajouter à G tous les éléments $j \in J$ tels que $T \cap I_j \neq \emptyset$, on peut supposer que $T \subset \bigcup_{j\in G} I_j$ (mais G reste un ensemble fini). On pose alors $K = \bigcup_{j\in G} I_j$ et, puisque c'est une somme finie,
$$\sum_{j\in G}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in K} u_i$$
Donc
$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)\right| &\leqslant \left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in K} u_i + \sum_{i\in K} u_i - \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in K} u_i\right| + \left|\sum_{j\in G}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) - \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)\right| \\
&\leqslant 2\varepsilon
\end{aligned}$$

□