

Proposition

Soit X et Y deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
On considère $f : X(\Omega) \rightarrow E, g : Y(\Omega) \rightarrow F$. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

Démonstration : Soit $x \in E$ et $y \in F$, on sait que

$$(f(X) = x) = \bigcup_{\substack{u \in X(\Omega) \\ f(u)=x}} (X = u) \quad \text{et} \quad (g(Y) = y) = \bigcup_{\substack{v \in Y(\Omega) \\ g(v)=y}} (Y = v)$$

De ce fait, par distributivité de \cap sur \cup

$$(f(X) = x) \cap (g(Y) = y) = \bigcup_{\substack{(u,v) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ f(u)=x, g(v)=y}} (X = u) \cap (Y = v)$$

Les événements dans cette union étant deux à deux disjoints et les variables X et Y étant supposées indépendantes, on obtient que

$$\mathbf{P}\left((f(X) = x) \cap (g(Y) = y)\right) = \sum_{\substack{(u,v) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ f(u)=x, g(v)=y}} \mathbf{P}(X = u) \times \mathbf{P}(Y = v)$$

Or, en procédant de même,

$$\mathbf{P}(f(X) = x) = \sum_{\substack{u \in X(\Omega) \\ f(u)=x}} \mathbf{P}(X = u) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(g(Y) = y) = \sum_{\substack{v \in Y(\Omega) \\ g(v)=y}} \mathbf{P}(Y = v)$$

Le théorème de sommation par paquets permet alors de conclure :

$$\mathbf{P}\left((f(X) = x) \cap (g(Y) = y)\right) = \mathbf{P}(f(X) = x) \times \mathbf{P}(g(Y) = y)$$

Les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont bien indépendantes.

□

Théorème (Lemme des coalitions)

Soit (X_1, \dots, X_n) des variables aléatoires discrètes indépendantes. Soit $k \in \llbracket 1 ; n - 1 \rrbracket$ et

$$f : \prod_{i=1}^k X_i(\Omega) \rightarrow E ; g : \prod_{i=k+1}^n X_i(\Omega) \rightarrow F$$

Les variables $f(X_1, \dots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont des variables aléatoires discrètes indépendantes.

Démonstration :

L'idée est de montrer que $Y = (X_1, \dots, X_k)$ et $Z = (X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont des vecteurs aléatoires indépendants, d'utiliser le résultat précédent.

Soit $(x_1, \dots, x_k) \in \prod_{i=1}^k X_i(\Omega)$ et $(x_{k+1}, \dots, x_n) \in \prod_{i=k+1}^n X_i(\Omega)$,

$$(Y = (x_1, \dots, x_k)) = \bigcap_{i=1}^k (X_i = x_i) \text{ et } (Z = (x_{k+1}, \dots, x_n)) = \bigcap_{i=k+1}^n (X_i = x_i).$$

On en déduit, d'après l'indépendance des variables X_i que

$$\mathbf{P}\left((Y = (x_1, \dots, x_k)) \cap (Z = (x_{k+1}, \dots, x_n))\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = x_i)$$

De même

$$\mathbf{P}(Y = (x_1, \dots, x_k)) \times \mathbf{P}(Z = (x_{k+1}, \dots, x_n)) = \prod_{i=1}^k \mathbf{P}(X_i = x_i) \times \prod_{i=k+1}^n \mathbf{P}(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = x_i).$$

On a bien montré que Y et Z étaient indépendantes. Il suffit alors d'utiliser le résultat précédent.

□

Remarque : Ce résultat s'étend de manière évidente au cas où il y a plus de deux fonctions.