Partie I : Matrices compagnons

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbf{K}$. On définit la matrice compagnon de P par

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

Notons que pour $n = 1$ et $P = X + a_0$ on a donc $C(P) = (-a_0) \in \mathscr{M}_1(\mathbf{K})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $C(P)$ pour $P = X^3 + X^2 - X - 1$.
2. Montrer que $\chi_{C(P)} = P$. *On pourra procéder par récurrence mais ce n'est pas obligatoire.*

Partie II : Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On veut montrer que $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. On fixe un élément x de E non nul.
   On note p le plus petit entier p tel que la famille $(x = u^0(x), u(x), \ldots, u^p(x))$ soit liée.
   (a) Justifier que l'entier p est bien défini et que $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre.
   On complète cette famille en une base $\mathscr{B}$ de E.
   (b) Montrer qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbf{K}^p$ tels que
   $$u^p(x) + a_{p-1}u^{p-1}(x) + \cdots + a_1u(x) + a_0x = 0$$
   On note $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0$.
   (c) Justifier que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ peut s'écrire sous la forme $\left(\begin{array}{c|c} C(P) & * \\ \hline 0 & M \end{array}\right)$.
   (d) Calculer $P(u)(x)$.
   (e) Exprimer χ_u en fonction de χ_M.
   (f) Prouver que $\chi_u(u)(x) = 0_E$.
2. Conclure.