Semaine 10 - du 1er au 5 décembre

Réduction des endomorphismes

Polynômes de matrices et d'endomorphismes

Définition de $P(u)$ et $P(A)$ pour $P \in \mathbf{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
Morphismes d'algèbres $\Phi_u : P \mapsto P(u)$ et $\Phi_A : P \mapsto P(A)$.

Polynômes annulateurs

Idéal des polynômes annulateurs d'une endomorphisme, d'une matrice.
Polynôme minimal
Si $P(A) = 0$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $P(\lambda) = 0$.
Théorème de Cayley-Hamilton : $\chi_A(A) = 0$.
Lemme de décomposition des noyaux
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il est annulé par un polynôme scindé à racines simples si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.
Polynôme annulateur d'un endomorphisme induit ; diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Endomorphisme annulé par un polynôme scindé

Sous-espaces caractéristiques
S'il existe un polynôme scindé annulant u, décomposition de E en somme directe des sous-espaces caractéristiques. Ils sont stables par u et, sur chacun, u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent
Traduction matricielle