

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^3 x^2}$ définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

1. Montrer que f est continue

Corrigé

On pose $f_n = x \mapsto \frac{1}{n + n^3 x^2}$ qui est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

Soit $a > 0$, la fonction f_n est positive et décroissante sur $K = [a, +\infty[$ donc $\|f_n\|_{\infty, K} = f_n(a)$.

Comme $f_n(a) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 a^2}$, la série $\sum \|f_n\|_{\infty, K}$ converge. De ce fait, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, la fonction f est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

2. Calculer $\lim_{+\infty} f$.

Corrigé

Déterminons $\lim_{+\infty} f$. On a montré à la question précédente que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$ qui est un voisinage de $+\infty$. De plus, pour tout entier n non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. On

en déduit par le théorème de double limite que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.

3. Calculer $\lim_{0^+} f$.

Corrigé

La fonction f est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$ comme somme de fonctions décroissantes. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f$ existe dans $\overline{\mathbf{R}}$. Notons ℓ cette limite. Pour tout entier N et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on remarque que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^N f_n(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \geq \sum_{n=1}^N f_n(x).$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow 0^+$,

$$\ell \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

Il suffit alors de faire tendre N vers $+\infty$ pour vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

Corrigé

Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et $f'_n : x \mapsto -\frac{2n^3x}{(n + n^3x^2)^2}$. Soit $K = [a, b]$ un segment de $\mathbf{R}_+^*$, pour $x \in K$,

$$|f'_n(x)| \leq \frac{2n^3b}{(n + n^3a)^2} \leq \frac{C}{n^3} \text{ où } C = \frac{2b}{a^2}$$

On a donc $\|f'_n\|_{\infty, K} \leq \frac{C}{n^3}$ et donc la série $\sum \|f'_n\|_{\infty, K}$ converge.

Cela montre que la série $\sum f'_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment $K \subset \mathbf{R}_+^*$. La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.