

On note X le nombre de colis transporté par un livreur dans le mois. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose que chaque colis a une probabilité $p \in]0, 1[$ de se faire endommager indépendamment des autres colis. On note alors Y le nombre de colis endommagés. On note aussi $Z = X - Y$.

1. Soit $m \in \mathbf{N}$, rappeler $\mathbf{P}(X = m)$.

Corrigé

D'après le cours, comme $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$,

$$\forall m \in \mathbf{N}, \mathbf{P}(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$$

2. Déterminer pour tout n dans $\mathbf{N}$ la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$

Corrigé

On suppose que $(X = n)$. Il y a donc n colis. Chacun se fait endommager **indépendamment** des autres avec la probabilité p donc la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est la loi binomiale de paramètres n et p . On a

$$\forall k \in \mathbf{N}, \mathbf{P}(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

en posant $q = 1 - p$.

3. Déterminer la loi de Y

Corrigé

Soit $k \in \mathbf{N}$, on calcule la probabilité $\mathbf{P}(Y = k)$ en utilisant le système complet d'événements $\{(X = n)\}_{n \in \mathbf{N}}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) \mathbf{P}(Y = k | X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} p^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda^n \frac{1}{(n-k)!} q^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!} p^k e^{-\lambda} \lambda^k \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} q^{n-k} \\ &= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!} \end{aligned}$$

On en déduit que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

4. Déterminer la loi de Z .

Corrigé

La variable aléatoire Z compte le nombre de colis intact. Comme chaque colis a une probabilité $q = 1 - p$ de rester intact, on peut reprendre les calculs ci-dessus en remplaçant p par q (et réciproquement). On en déduit que $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda q)$.

- d) Montrer que Y et Z sont indépendantes. On pourra commencer par déterminer la loi de Z .

Corrigé

Pour k_1 et k_2 dans $\mathbf{N}$ on calcule la probabilité que $(Y = k_1) \cap (Z = k_2) = (Y = k_1) \cap (X = k_1 + k_2)$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}((Y = k_1) \cap (X = k_1 + k_2)) &= \mathbf{P}(X = k_1 + k_2) \cdot \mathbf{P}(Y = k_1 | X = k_1 + k_2) \\ &= \frac{\lambda^{k_1+k_2} e^{-\lambda}}{(k_1 + k_2)!} \binom{k_1 + k_2}{k_1} p^{k_1} q^{k_2} \\ &= \frac{\lambda^{k_1+k_2} e^{-\lambda(p+q)}}{k_1! k_2!} p^{k_1} q^{k_2} \\ &= \frac{(\lambda p)^{k_1} e^{-\lambda p}}{k_1!} \times \frac{(\lambda q)^{k_2} e^{-\lambda q}}{k_2!} \\ &= \mathbf{P}(Y = k_1) \mathbf{P}(Z = k_2) \end{aligned}$$

Les variables Y et Z sont bien indépendantes.