Théorème (Théorème d'Abel radial)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$. On suppose de plus que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n R^n$ converge. On a

$$\lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbf{R}_+^*$. On suppose de plus que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n R^n$ converge.

1. On suppose dans cette question que $R = 1$.
   Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on pose :

$$\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \;\; ; \;\; S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;\text{ et }\; R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

   Soit $\varepsilon > 0$:

   (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|\rho_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

   (b) Justifier, pour tout entier n et pour tout entier $p > n+1$, l'égalité :

$$\forall x \in [0,1], \quad S_p(x) - S_n(x) = x^{n+1}\,\rho_n + \sum_{k=n+1}^{p-1} \left(x^{k+1} - x^k\right) \rho_k - x^p\,\rho_p$$

   (c) En déduire que, pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $p > n+1$:

$$\forall x \in [0,1] \quad , \quad |S_p(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}) + x^p\right)$$

   (d) En déduire que : $\forall n \geqslant N, \forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leqslant \varepsilon$

   (e) Conclure que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

   (f) Démontrer le théorème d'Abel radial dans le cas où $R = 1$.

2. Démontrer le cas général du théorème.

3. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et calculer sa somme.