Partie I - Unicité de la décomposition de Dunford

1. Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent.
   a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ une valeur propre de u et $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$. Puisque u et v commutent :

   $$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

   D'où $v(x) \in E_\lambda(u)$. On a montré que $\forall x \in E_\lambda(u), v(x) \in E_\lambda(u)$. Donc $E_\lambda(u)$ est stable par v.
   $\boxed{\text{Tout sous-espace propre de } u \text{ est stable par } v.}$

   b) On suppose que u et v sont diagonalisables.
   On note $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes.
   Pour $i \in [\![1, p]\!]$, $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v. Notons v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.
   Puisque v est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé à racines simples qui annule v, alors P annule également v_i donc v_i est diagonalisable. Soit $\mathscr{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres de v_i, alors ce sont des vecteurs propres de v. De plus $\mathscr{B}_i$ est aussi formée de vecteurs propres de u car $\forall x \in E_{\lambda_i}(u), u(x) = \lambda_i x$.
   Puisque u est diagonalisable, E se décompose en somme directe des sous-espaces propres de u :

   $$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u).$$

   $\mathscr{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}(u)$ donc $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_p$ est une base de E, formée de vecteurs propres de u et de v.
   $\boxed{\text{Il existe une base } \mathscr{B} \text{ commune de diagonalisation de } u \text{ et } v.}$

2. Soient M et M' deux matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent.
   D'après la question précédente, il existe une base commune $\mathscr{B}$ de diagonalisation pour les endomorphismes associés. Donc il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{C})$, qui est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base $\mathscr{B}$, telle que $P^{-1}MP = D$ et $P^{-1}M'P = D'$ soient deux matrices diagonales.
   Alors $P^{-1}(M-M')P = P^{-1}MP - P^{-1}M'P = D - D'$ est diagonale, donc $M - M'$ est diagonalisable.

3. Soient N et N' deux matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent.
   On suppose que N est nilpotente d'indice p et que N' est nilpotente d'indice q. On a $N^p = 0$ et $N'^q = 0$.
   Puisque N et N' commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

   $$(N - N')^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} N^k (-1)^{p+q-1-k} N'^{p+q-1-k}$$

   Si $k \geqslant p$, alors $N^k = 0$.
   Sinon, on a $k \leqslant p-1$, donc $p+q-1-k \geqslant q$, d'où $N'^{p+q-1-k} = 0$.
   On en déduit que tous les termes de la somme sont nuls, donc $\boxed{(N - N')^{p+q-1} = 0}$ et $N - N'$ est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à $p + q - 1$.
   $\boxed{\text{Si } N \text{ et } N' \text{ sont deux matrices nilpotentes de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ qui commutent, alors } N - N' \text{ est nilpotente.}}$

4. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois diagonalisable et nilpotente.
Puisque A est nilpotente, 0 est la seule valeur propre de A. Puisque A est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, A est semblable à la matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ comprenant des 0 sur la diagonale. Donc $D = 0$ et A est semblable donc égale à la matrice nulle. Ainsi $A = 0$.
Réciproquement, la matrice nulle est diagonalisable et nilpotente.
$\boxed{\text{La seule matrice de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ à la fois diagonalisable et nilpotente est la matrice nulle.}}$

5. Soit (D, N) la décomposition de Dunford et (D', N') un couple qui vérifie (C1), (C2), (C3) et (C4).
On a $D'N' = N'D'$ donc

$$AD' = (D' + N')D' = D'^2 + N'D' = D'^2 + D'N' = D'(D' + N') = DA$$

On a obtenu que A et D' commutent et donc D' commute avec les polynômes en A. En particulier, D' commute avec D.
De manière similaire, N' commute avec A donc avec $N \in \mathbb{C}[A]$.
Comme de plus $D + N = A = D' + N'$, on obtient que $D - D' = N' - N$. La matrice $D - D'$ est diagonalisable d'après 2) et la matrice $N' - N$ est nilpotente d'après 3) donc $D - D' = N' - N = 0$ d'après 4).
Cela montre l'unicité de la décomposition de Dunford.

Partie II - Quelques exemples

6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   - Si A est diagonalisable, $(D, N) = (A, 0)$ est la décomposition de Dunford de A .
     En effet, $D = A$ est diagonalisable, $N = 0$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = A+0 = D+N$.
   - Si A est nilpotente, $(D, N) = (0, A)$ est la décomposition de Dunford de A .
     En effet, $D = 0$ est diagonalisable, $N = A$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = 0+A = D+N$.

7. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
La matrice D' est diagonalisable (car diagonale), N' est nilpotente (car $(N')^2 = 0$), $A = D' + N'$, cependant D' et N' ne commutent pas :

$$D'N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq N'D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Non, } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ n'est pas la décomposition de Dunford de } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$ car ces deux matrices ne commutent pas.
De plus, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ possède deux valeurs propres distinctes 1 et 2, donc est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, donc $(D, N) = (A, 0)$ est la décomposition de Dunford de A.

8. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. Calculons son polynôme caractéristique, en développant par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix} &= (X+1)\begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)(X^2 + 2X + 1) &= (X+1)^3. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X+1)^3.}$

Par le théorème de Cayley - Hamilton, $\chi_A(A) = (A+I)^3 = 0$. On en déduit que $N = A+I$ est nilpotente. On pose alors $D = -I$ qui est bien diagonalisable (car diagonale). Comme de plus $NI = IN$, le couple $(-I, A+I)$ est la décomposition de Dunford de A.

9. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
Posons $P(X) = X(X-1)$. On a

$$P(A^2) = A^2(A^2 - I_n) = A^2(A - I_n)(A + I_n) = 0(A + I_n) = 0$$

Donc le polynôme $X(X-1)$ annule la matrice A^2.

Posons alors $N = A - A^2$ et vérifions les conditions
- On a bien $A = A^2 + (A - A^2)$
- La matrice A^2 est diagonalisable puisque le polynôme $X(X-1)$ qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ annule A^2.
- On a
$$(A - A^2)^2 = A(A-I)A(A-I) = A^2(A-I)(A-I) = 0$$
Cela montre que $A - A^2$ est nilpotente
- Les matrice A^2 et $A - A^2$ commutent en tant que polynômes en A.

On a bien montré que $(A^2, A - A^2)$ était la décomposition de Dunford de A.

Partie III - Un exemple par deux méthodes

10. Calculons le polynôme caractéristique de A.
On trouve $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$. Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$. On a $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 1$. Calculons $\dim(\mathrm{Ker}(A - 2I_3))$.
$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
La matrice $(A - 3I_3)$ est de rang 2. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A - 3I_3)) = 1 < 2$.
La dimension du sous-espace propre associé à 2 est strictement inférieure à la multiplicité de 2 en tant que valeur propre dans χ_A, donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathscr{M}_3(\mathbb{C}).}$
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A. Par le théorème de Cayley-Hamilton, χ_u annule u, or $\chi_u(X) = (X-1)(X-2)^2$. Les polynômes $(X-1)$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux.
Par le lemme de décomposition des noyaux, $\boxed{\mathbb{C}^3 = \mathrm{Ker}(\chi_u(u)) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id})^2.}$

11. Calculons les noyaux des endomorphismes demandés.

$$\begin{aligned}
A - I_3 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. & \mathrm{Ker}(A - I_3) &= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\
A - 2I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. & \mathrm{Ker}(A - 2I_3) &= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\
(A - 2I_3)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. & \mathrm{Ker}(A - 2I_3)^2 &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Posons alors

$$\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

P est la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique. Or $\det(P) = -1 \neq 0$ donc la famille(e_1, e_2, e_3) est libre et de cardinal $3 = \dim(\mathbb{C}^3)$, donc c'est une base de $\mathbb{C}^3$. $P \in GL_3(\mathbb{C})$ est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ à la base (e_1, e_2, e_3).
De plus $\boxed{\operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}) = \operatorname{Vect}(e_1),\ \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{id}) = \operatorname{Vect}(e_2),\ \operatorname{Ker}(u - 2\mathrm{id})^2 = \operatorname{Vect}(e_2, e_3).}$
Par construction, on a $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = 2e_2$. De plus

$$u(e_3) = Ae_3 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_2 + 2e_3.$$

Ecrivons la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{C}^3$:

$$\boxed{B = \operatorname{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

12. Montrons que :

$$\left(D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est la décomposition de Dunford de } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effet : $B = D_1 + N_1$; D_1 est diagonale donc diagonalisable ; $N_1^2 = 0$ donc N_1 est nilpotente ; D_1 et N_1 commutent car $D_1 N_1 = N_1 D_1 = 2N_1$.
Puisque A et B représentent la matrice du même endomorphisme u dans la base canonique et dans la base $\mathscr{B}$, on a la formule de changement de base $P^{-1}AP = B$ i.e. $A = PBP^{-1}$. De plus on obtient l'inverse de P en remarquant que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2 + e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3. \quad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

On pose $D = PD_1P^{-1}$ et $N = PN_1P^{-1}$.
On voit que (D, N) est la décomposition de Dunford de A puisque

- $A = PBP^{-1} = P(D_1 + N_1)P^{-1} = PD_1P^{-1} + PN_1P^{-1} = D + N$.
- $D = PD_1P^{-1}$ est semblable à la matrice diagonale D_1 donc D est diagonalisable.
- $N^2 = (PN_1P^{-1})^2 = PN_1^2P^{-1} = 0$ donc N est nilpotente.
- D et N commutent car D_1 et N_1 commutent :

$$DN = (PD_1P^{-1})(PN_1P^{-1}) = P(D_1N_1)P^{-1} = P(N_1D_1)P^{-1} = (PN_1P^{-1})(PD_1P^{-1}) = ND.$$

Donc (D, N) est la décomposition de Dunford de A.

Calculons ces matrices :

$$D = PD_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$N = PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement $\left(D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est la décomposition de Dunford de A.

13. On décompose la fraction en éléments simples. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{(X-2)^2} = \frac{(a+b)X^2 + (c-b-4a)X + 4a - c}{(X-1)(X-2)^2}.$$

Par identification des coefficients,

$$\begin{cases} a+b &= 0. \\ c-b-4a &= 0. \\ 4a-c &= 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1. \\ b &= -1. \\ c &= 3. \end{cases}$$

Donc

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{-X+3}{(X-2)^2}$$

On en déduit par multiplication par $(X-1)(X-2)^2$: $\quad 1 = (X-2)^2 + (-X+3)(X-1)$.
Posons $U(X) = -X+3, \quad V(X) = 1$. On a $\deg(U) = 1 < 2$, $\deg(V) = 0 < 1$ et

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1$$

14. On pose $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{id})$.
On a obtenu à la question précédente la relation $U(X)(X-1) + V(X)(X-2)^2 = 1$. On évalue cette égalité en l'endomorphisme u :

$$p + q = U(u) \circ (u - \mathrm{id}) + V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2 = 1(u) = \mathrm{id}.$$

Donc $p + q = \mathrm{id}$.
Posons $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $G = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id})^2$.
Pour $x \in \mathbb{C}^3$, comme $(X-1)(X-2)^2$ est un polynôme annulateur de u,

$$(u - \mathrm{id})(p(x)) = ((X-1)(X-2)^2V)(u)(x) = 0$$

Cela montre que $p(x) \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$. Un calcul similaire montre $q(x) \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id})^2$.
Finalement p est le projecteur sur F parallèlement à G et q le projecteur sur G parallèlement à F.

15. On pose $d = p + 2q$.
Puisque $e_1 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$, on a $p(e_1) = e_1$ et $q(e_1) = 0$. D'où $d(e_1) = p(e_1) + 2q(e_1) = e_1$.
Puisque $e_2 \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id})^2$, on a $p(e_2) = 0$ et $q(e_2) = e_2$. D'où $d(e_2) = p(e_2) + 2q(e_2) = 2e_2$.

De même, $e_2 \in \mathrm{Ker}(u-2\mathrm{id})^2$ donc $d(e_3) = 2e_3$.
On obtient la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{C}^3$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} d(e_1) & = & e_1. \\ d(e_2) & = & 2e_2. \\ d(e_3) & = & 2e_3. \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(On retrouve la matrice D_1 de la décomposition de Dunford de B.) Or

$$\begin{array}{rclcl@{\quad}c@{\quad}l} p & = & V(u)\circ(u-2\mathrm{id})^2 & = & (X-2)^2(u) & = & (X^2-4X+4)(u) \\ q & = & U(u)\circ(u-\mathrm{id}) & = & ((-X+3)(X-1))(u) & = & (-X^2+4X-3)(u). \\ d & = & p+2q & = & \Big((X^2-4X+4)+2(-X^2+4X-3)\Big)(u) & = & (-X^2+4X-2)(u). \end{array}$$

Donc $d = (-X^2+4X-2)(u)$ et $D = (-X^2+4X-2)(A) = -A^2+4A-2I$. Enfin $N = A - D = A^2 - 3A + 2I$.
Donc$(D = -A^2+4A-2I, N = A^2-3A+2I)$ est la décomposition de Dunford de A.