Devoir libre 10

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie II. Tout au long du problème, le disque unité ouvert de $\mathbf{C}$ sera noté :

$$D = \{z \in \mathbf{C} \ ; \ |z| < 1\}.$$

Partie I - Fonctions L et P

1. Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$.
   Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in]-1,1[$.
   On notera : $L(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.
2. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto L(tz)$ est dérivable sur $[-1,1]$ et donner une expression simple de sa dérivée.
3. Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1-tz)e^{L(tz)}$ est constante sur $[0,1]$, et en déduire que : $\exp(L(z)) = \dfrac{1}{1-z}$.
4. Montrer que $|L(z)| \leqslant -\ln(1-|z|)$ pour tout z dans D.
   En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} L\left(z^n\right)$ pour tout z dans D.

Dans la suite, on notera, pour z dans D : $P(z) := \exp\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} L\left(z^n\right)\right]$.

5. Soit $z \in D$. Vérifier que $P(z) \neq 0$, que : $P(z) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-z^n}$.

Partie II - Développement de P en série entière

Pour $(n,N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1,\dots,a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k a_k = n$.

6. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est inclus dans $[\![0,n]\!]^N$ et est non vide.

On note dans la suite $p_{n,N}$ le cardinal de $P_{n,N}$.

7. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que la suite $(p_{n,N})_{N\geqslant 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n,1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N\geqslant 1}$.

8. Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Donner une suite $(a_{n,N})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall z \in D, \quad \dfrac{1}{1-z^N} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N} z^n$.

   En déduire, par récurrence, la formule :

$$\forall N \in \mathbf{N}^*, \ \forall z \in D, \quad \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$$

9. On fixe $\ell \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1[$. En utilisant le résultat de la question précédente, établir la majoration : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leqslant P(x)$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} p_n z^n$.

10. Soit $z \in D$. En majorant $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n\right|$, démontrer que : $P(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$.

11. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$:
$$p_n = \frac{e^{nt}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P\left(e^{-t+i\theta}\right) \mathrm{d}\theta \tag{1}$$

Partie III - Contrôle de P

12. Soient $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que :
$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leqslant \exp(-(1-\cos(\theta))x).$$
En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout réel θ :
$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right)$$

13. Soient $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer que :
$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) \geqslant \frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left(1+x^2-2x\cos\theta\right)} = \frac{x(1-\cos(\theta))}{(1-x)\left((1-x)^2+2x(1-\cos(\theta))\right)}$$
En déduire que si $x \geqslant \frac{1}{2}$, alors :
$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos(\theta)}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou que} \quad \left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right)$$
Pour ce dernier résultat, on distinguera deux cas selon les valeurs relatives de $x(1-\cos(\theta))$ et $(1-x)^2$.

14. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :
$$\forall \theta \in [-\pi,\pi], \quad 1-\cos(\theta) \geqslant \alpha\theta^2.$$
En déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0, \beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in]0,t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi,\pi]$:
$$\left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant e^{-\beta\left(\theta\, t^{-3/2}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\right| \leqslant e^{-\gamma\left(|\theta|\, t^{-3/2}\right)^{2/3}}$$

15. En déduire que :
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta = \underset{t\to 0^+}{O}\left(t^{3/2}\right)$$

Partie IV - Conclusion

16. On admet que
$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1)$$
En prenant $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ dans (1), conclure que :
$$p_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right)$$