

## Semaine 12 - du 15 au 19 décembre

### Espaces vectoriels normés (suite) et séries entières

---

## Espaces vectoriels normés

### Suites

Convergence. Unicité de la limite.

La suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  ssi  $(\|u_n - \ell\|)$  tend vers 0.

Cas de la norme produit.

Invariance de la convergence en remplaçant la norme par une norme équivalente.

Toute suite convergente est bornée.

Limite d'une somme, compatibilité à la multiplication externe.

Compatibilité de la limite au produit dans le cas d'une algèbre  $\mathcal{A}$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$  tel qu'il existe une constante  $C$  vérifiant :  $\forall x, y \in \mathcal{A}^2, \|x \times y\| \leq C\|x\|\cdot\|y\|$

Valeur d'adhérence d'une suite

## Applications lipschitziennes

Définition d'une application lipschitzienne

Si  $(u_n)$  tend vers  $\ell$  et que  $f$  est lipschitzienne, la suite  $(f(u_n))$  tend vers  $f(\ell)$

Si  $f$  est linéaire, elle est lipschitzienne si et seulement s'il existe  $k$  tel que  $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|$ .

Normes subordonnées

## Séries entières

### Séries entières

Définition

Lemme d'Abel

Rayon de convergence d'une série entière : la série converge dans le disque ouvert et diverge en dehors du disque fermé.

Application de la méthode de D'Alembert à la recherche du rayon de convergence.

## Comparaisons et opérations

Si  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  sont deux séries entières et que  $a_n = O(b_n)$  alors  $\rho_a \geq \rho_b$ .

Si  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  sont deux séries entières et que  $a_n \sim b_n$  alors  $\rho_a = \rho_b$ .

Rayon de convergence d'une somme de séries entières (cas où les rayons de convergence sont égaux et cas où ils sont différents)

Produit de Cauchy de deux séries entières