1. On pose $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) \ , \ \int_0^{+\infty} f^2 \text{ converge} \right\}$
   Montrer que si $(f, g) \in E^2$ alors $f + g$ aussi

**Corrigé**

Commençons en montrant que si $(f, g) \in E^2$ alors $\int_0^{+\infty} fg$ converge.
En effet, si $(f, g) \in E^2$ alors $fg$ est une fonction continue. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2}$$

d'après l'inégalité artihmético-géométrique. De ce fait, par comparaison pour les fonctions positives, $\int_0^{+\infty} |fg|$ converge et donc $\int_0^{+\infty} fg$ converge.
On peut conclure par linéarité en voyant que $(f + g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$.

2. Soit $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ l'ensemble des suites réelles bornées. On pose pour $u$ dans $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ : $N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$.

   (a) Justifier que $N$ est bien définie et que c'est une norme.

**Corrigé**

Soit $u \in \mathscr{B}(\mathbf{N})$. Elle est bornée. On en déduit que pour tout entier $n$, $0 \leqslant \frac{|u_n|}{2^n} \leqslant \frac{\|u\|_\infty}{2^n}$. Or la série $\left( \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^n} \right)$ converge donc, la série de terme général $\frac{|u_n|}{2^n}$ est convergente par comparaison pour les séries à termes positifs.
Vérifions alors que $N$ est une norme.

*i)* Elle est valeurs positives.

*ii)* Soit $u$ telle que $N(u) = 0$. On a alors que pour tout entier $n$, $\frac{|u_n|}{2^n} = 0$ et donc $u_n = 0$. Finalement, $u = 0$.

*iii)* Soit $u \in \mathscr{B}(\mathbf{N})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, $N(\lambda.u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda.u_n|}{2^n} = |\lambda|. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} = |\lambda| N(u)$.

*iv)* Soit $(u, v) \in \mathscr{B}(\mathbf{N})^2$. On a

$$N(u + v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n + v_n|}{2^n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|v_n|}{2^n} = N(u) + N(v)$$

On a bien vérifié que $N$ était une norme

(b) Montrer que pour tout $u \in \mathscr{B}(\mathbf{N})$, $N(u) \leqslant 2\|u\|_\infty$.

**Corrigé**

On a : $N(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \leqslant \|u\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2\|u\|_\infty$.

(c) Les normes $N$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

**Corrigé**

Elles ne sont pas équivalentes car on ne peut pas trouver de constante $K$ telle que pour tout suite $u$ de $\mathscr{B}(\mathbf{N})$, $\|u\|_\infty \leqslant KN(u)$. En effet, si on pose $(u^{[p]})_{p\geqslant 0}$ la suite définie par

$$u^{[p]} : n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $\|u^{[p]}\|_\infty = 1$ et $N(u^{[p]}) = \frac{1}{2^p}$ et donc $\dfrac{\|u^{[p]}\|_\infty}{N(u^{[p]})} = 2^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.