Rappelons le théorème de réductions des isométries vectorielles d'un espace euclidien

Théorème (Réduction des isométries - Version endomorphismes)

Soit f une isométrie vectorielle de E. Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E tel que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ soit diagonale par blocs avec des blocs de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbf{R}); (1) \in O_1(\mathbf{R}); (-1) \in O_1(\mathbf{R}).$$

C'est-à-dire, en regroupant les blocs,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} R_{\theta_1} & & & & \\ \hline & \ddots & & & \\ \hline & & R_{\theta_r} & & \\ \hline & & & I_p & \\ \hline & & & & -I_q \end{array}\right)$$

1-Généralités

On va appliquer ce qui précède pour $n = 3$. Par la suite E désigne un espace euclidien orienté de dimension 3.

On va essayer de décrire les éléments de $SO(E)$ et de $SO_3(\mathbf{R})$.

Proposition

Soit $A \in SO_3(\mathbf{R})$. Comme $\det A = 1$, elle est semblable a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la réduction des isométries.

— S'il n'y a que des blocs de taille 1, on est de la forme voulue en posant $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

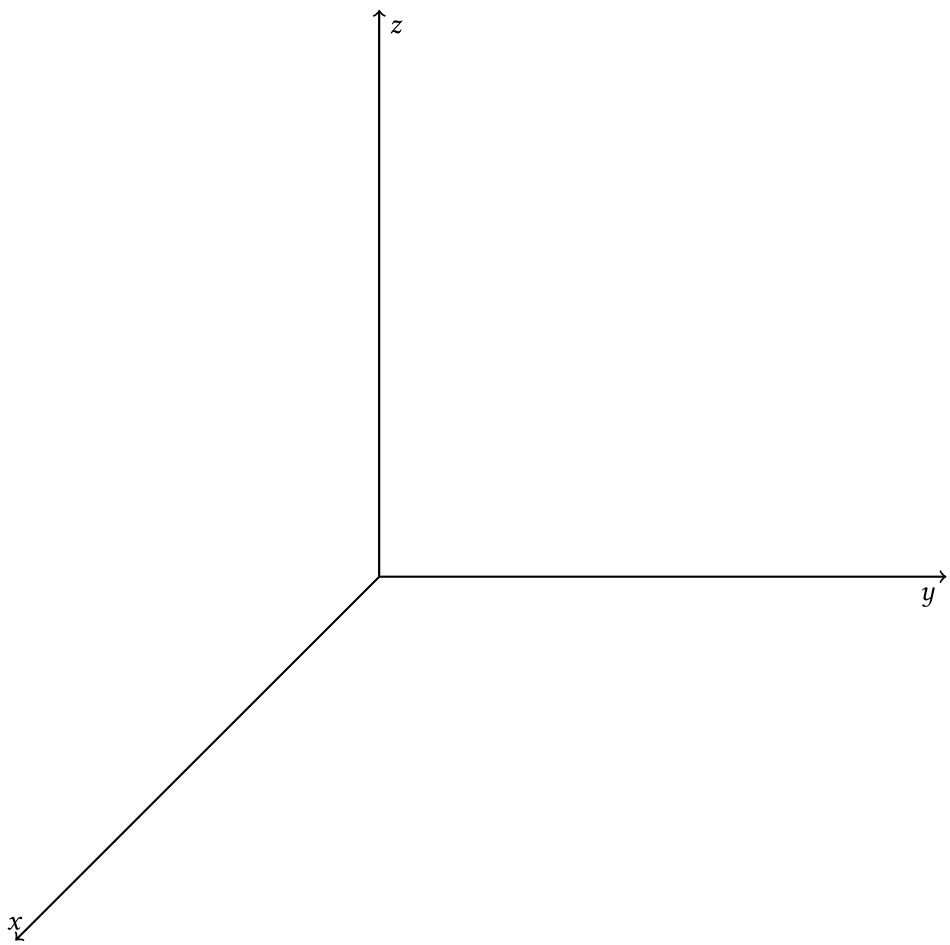
— Sinon, on a un bloc de taille 2 et un bloc de taille 1. Le bloc de taille 1 étant (1) car $\det(u) = 1$.

□

Définition

Soit w un vecteur non nul de E et θ un réel. On appelle rotation d'axe autour de w et d'angle θ, l'isométrie vectorielle laissant stable $F = Vect(w)$ et tel que $\check{f}$ la restriction de f à $H = F^{\perp}$ soit la rotation d'angle θ. Si $\mathscr{B} = (u, v, w')$ est une base orthonormée directe avec $w' = w/\|w\|$, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



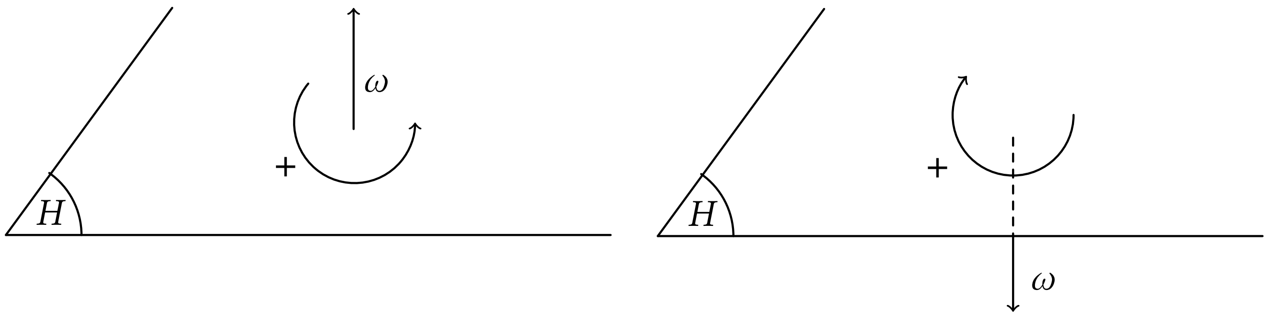
Remarques :

1. La droite vectorielle F s'appelle l'axe de f.
2. Si l'angle vaut π et donc la matrice est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on dit que c'est un demi-tour.
3. La plupart du temps on prendra w unitaire.

Pour définir proprement la rotation d'angle θ dans le plan $H = F^{\perp}$, il faut orienter ce plan. L'orientation est donnée par le choix du vecteur normal.

Proposition

Soit w un vecteur unitaire de E. Il existe une unique orientation du plan $H = \text{Vect}(w)^{\perp}$ tel que pour toute base orthonormée directe (u, v) de H, la base (u, v, w) soit directe dans E.



Remarques :

1. On dit alors que H est orienté par le vecteur w. On peut d'ailleurs procéder dans l'autre sens. Si on se donne un plan H, pour l'orienter, il suffit de choisir un des deux vecteur unitaires de $H^{\perp}$.
2. Il faut faire attention que si on change w en $-w$ la rotation change car le plan H est alors orienté dans l'autre sens.

ATTENTION

On voit donc que dans les isométries vectorielles de l'espace :

- il y a les rotations (qui sont les éléments de $SO(E)$)
- il y a aussi les réflexions (symétrie orthogonale par rapport à un plan) qui sont dans $O(E) \setminus SO(E)$.
- contrairement au cas du plan, il y en a d'autres. Par exemple l'application $u = -\text{id}_E$ est un élément de $O(E)$ mais pas de $SO(E)$ car $\det(u) = (-1)^3 = -1$. Mais ce n'est pas une réflexion car aucun vecteur n'est invariant.
  De fait, c'est la composée du demi-tour et d'une reflexion car :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 - Méthodes de calculs

Commençons par une capture d'écran du programme officiel

Contenus	Capacités & Commentaires
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques dun élément de $SO_3(\mathbb{R})$ nest pas un attendu du programme.

Voici comment déterminer la matrice d'une rotation dont on connait w et θ et inversement, connaissant la matrice comment retrouver w et θ.

— Détermination de la matrice :

Proposition

Soit w un vecteur unitaire, θ un réel et f la rotation d'angle θ autour de w. Pour tout vecteur u orthogonal à w, on a

$$f(u) = (\cos\theta)u + (\sin\theta)(w \wedge u).$$

Démonstration : Il suffit de voir que, comme $(u, w, u\wedge w)$ est une base orthonormée directe alors $(u, w\wedge u, w)$ aussi. De ce fait, la matrice de f dans cette base est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le résultat en découle en regardant la première colonne. □

Soit w le vecteur $w = (1, 2, 0)$. On cherche la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ de la rotation autour de w et d'angle θ. Pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ on peut le décomposer comme somme d'un vecteur colinéaire à w et d'un vecteur qui lui est orthogonal (car F et $F^\perp$ sont en somme directe si $F = \mathrm{Vect}(w)$). On a

$$u = \frac{x+2y}{5}w + \frac{1}{5}(4x-2y, -2x-3y, 5z).$$

Maintenant $w \wedge \frac{1}{5}(4x-2y, -2x-3y, 5z) = \frac{1}{5}(10z, -5z, -10x+y)$. On a donc

$$f(u) = \frac{x+2y}{5}(1,2,0) + \frac{\cos\theta}{5}(4x-2y, -2x-3y, 5z) + \frac{\sin\theta}{5}(10z, -5z, -10x+y).$$

On peut alors en déduire la matrice ...

- Détermination de l'axe et de l'angle : A l'inverse soit $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. On vérifie que M est bien un matrice orthogonale et que son déterminant vaut 1. L'endomorphisme f canoniquement associé est donc une rotation de $\mathbf{R}^3$.

  Pour déterminer l'axe il suffit de chercher les invariant c'est-à-dire le noyau de $f - \mathrm{id}$. On trouve $w = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, -1, -1)$ en le prenant normé.

  Maintenant on prend un vecteur orthogonal à w et normé. On prend $u = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3, 0)$. On a

  $$\cos\theta = (u, f(u)) = \frac{7}{18} \text{ et } \sin\theta = (f(u), w\wedge u) = \mathrm{Det}(w, u, f(u)) = \frac{5\sqrt{11}}{18}.$$

  On peut aussi remarquer que $\mathrm{tr}(f) = 1 + 2\cos\theta$. On retrouve bien $\cos\theta = \frac{\mathrm{tr}(f)-1}{2} = \frac{7}{18}$.

  On peut alors déterminer le signe de θ en remarquant que $\sin\theta$ est du signe de $[u, f(u), w]$ pour $u \notin \mathrm{Vect}(w)$. En effet, en posant $u = \alpha + kw$ on a

  $$[\alpha + kw, f(\alpha) + kw, w] = [\alpha, f(\alpha), w] = \sin\theta[\alpha, w\wedge\alpha, w].$$

Exercice : Soit $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que $A \in SO(3, \mathbf{R})$. Déterminer son axe et son angle.