Dans tout ce document $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé

– Montrer qu'une partie est ouverte –

Soit X une partie de E. Voici les méthodes classiques pour montrer que X est un ouvert.

A) On revient à la définition. Une partie X de E est ouverte si et seulement si pour tout élément x de X, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset X$.

B) On montre que X est une réunion (quelconque) de parties ouvertes ou une intersection finie d'ouverts.

C) On montre que X est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

D) On montre que son complémentaire est fermé.

Donnons quelques exemples de ces méthodes.

— On considère $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Soit $X = \{f \in E\ ,\ f > 0\}$. Montrons que X est ouvert en utilisant la méthode A). Pour toute fonction f de X, comme elle est continue sur un segment, elle est minorée (ce qui est évident ici) et atteint son minimum. Il existe donc $x_0 \in [0,1]$ tel que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant f(x_0)$. Comme $f > 0$, on sait que $f(x_0) > 0$, on peut donc poser $\delta = \frac{f(x_0)}{2}$.
Il suffit alors de vérifier que $B(f, \delta) \subset X$. Soit g une fonction de cette boule, on a donc $\|g - f\|_\infty < \delta$. Pour tout x dans $[0,1]$,
$$g(x) = f(x) + (g(x) - f(x)) > f(x_0) - \delta > 0$$
On a bien que g appartient à X et donc $B(f, \delta) \subset X$. La partie X est un ouvert de E.

— Montrons que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On va utiliser la méthode C)
On considère $\det : \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$. On sait que le déterminant est une application polynomiale en les coordonnées [1] . Maintenant, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) = \det^{-1}(\mathbf{C}^*)$. Or $\mathbf{C}^*$ est un ouvert de $\mathbf{C}$ car son complémentaire $\{0\}$ est un fermé. Finalement, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

— Si E est un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension finie et si $\ell : E \to \mathbf{R}$ est une forme linéaire, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $X = \{x \in E\ ,\ \ell(x) > a\}$ est un ouvert. En effet $X = \ell^{-1}(]a, +\infty[)$ or ℓ est continue car c'est une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie et $]a, +\infty[$ est un ouvert.

1. car si $M = (m_{ij})$, alors $\det(M) = \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{1\sigma(1)} \times \cdots \times m_{n\sigma(n)}$.

– Montrer qu'une partie est fermée –

Soit X une partie de E. Voici les méthodes classiques pour montrer que X est un fermé.

A) On utilise la caractérisation séquentielle.
Précisément, pour montrer que X est fermé, il suffit de montrer que toute suite (x_n) d'éléments de X qui converge (donc qui a une limite $\ell \in E$) a sa limite dans X.

B) On montre que X est une intersection (quelconque) de parties fermées ou une union finie de fermés.

C) On montre que X est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

D) On montre que son complémentaire $\complement_E X$ est ouvert.

Donnons quelques exemples de ces méthodes.

— On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ ce sont les matrices $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que

i) Pour tout $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$, $m_{ij} \geqslant 0$

ii) Pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$.

Montrons que $\mathscr{S}$ est un fermé en utilisant la méthode A). Soit (M_p) une suite d'éléments de $\mathscr{S}$ telle que la suite (M_p) converge vers une matrice M. Pour tout $(i, j) \in [\![1 ; n]\!]^2$, $M[i, j] = \lim\limits_{p\to\infty} M_p[i, j]$. Comme pour tout $p \in \mathbf{N}$, $M_p \in \mathscr{S}$ on a $M_p[i, j]$ qui est une suite positive, sa limite est positive et donc $M[i, j] \geqslant 0$.
De plus, pour tout entier $i \in [\![1 ; n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} M[i, j] = \sum_{j=1}^{n} \lim_{p\to\infty} M_p[i, j] = \lim_{p\to\infty} \sum_{j=1}^{n} M_p[i, j] = 1$$

Finalement $M \in \mathscr{S}$ ce qui montre que $\mathscr{S}$ est fermé.

— Soit $\{x_1, \ldots, x_N\}$ un ensemble fini de points de E, $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ est fermé comme union finie de singletons qui sont des fermés.

— Soit $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ l'ensemble des suites réelles bornées et $\|.\|_\infty$ la norme infinie. Soit $X = \{u \in \mathscr{B}\,,\ u \text{ croissante}\}$.
Montrons que X est fermé. On considère son complémentaire Y. C'est l'ensemble des suites telles qu'il existe un entier n_0 vérifiant $u_{n_0+1} < u_{n_0}$. Soit u une telle suite et n_0 un entier correspondant. On pose $\delta = \dfrac{|u_{n_0+1} - u_{n_0}|}{3}$. Vérifions que $B(u, \delta)$ est inclus dans Y. Soit $v \in B(u, \delta)$. On a donc

$$v_{n_0+1} < u_{n_0+1} + \delta < u_{n_0} - \delta < v_{n_0}$$

On en déduit que Y est ouvert et donc X est fermé.

– Montrer qu'une partie est compacte –

Soit X une partie de E. Voici les méthodes classiques pour montrer que X est un compact.

A) Si E est de dimension finie, on utilisera **la plupart du temps** le fait que X est compact si et seulement si X est fermé et borné.

B) On revient à la définition. On considère une suite (x_n) d'éléments de X et on construit une sous-suite convergente.

C) On montre que X est l'image directe d'un compact K par une application continue. Assez souvent K sera alors compact comme produit d'un nombre fini de compact.

Donnons quelques exemples de ces méthodes.

- On reprend l'ensemble $\mathscr{S}$ des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On sait que $\mathscr{S}$ est fermé. Pour montrer que $\mathscr{S}$ est compact, il suffit de montrer qu'il est borné car $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie.
  Par définition de $\mathscr{S}$, tout coefficient d'une matrice M appartient à $[0,1]$ donc $\mathscr{S} \subset \overline{B}_\infty(0,1)$. On en déduit que $\mathscr{S}$ est borné et donc compact.

- Soit $K_1, \ldots, K_p$ un nombre fini de compacts. On pose $X = \bigcup_{i=1}^p K_i$. Montrons que X est compact.
  On considère une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de X. Il existe $i \in [\![1 ; p]\!]$ tel que $Z_i = \{n \in \mathbf{N} \, , \, x_n \in K_i\}$ est infini car $\mathbf{N} = \bigcup_{i=1}^p Z_i$. On peut donc trouver une extractive φ strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ soit à valeurs dans K_i. Comme K_i est compact, il existe une extractive ψ strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n\geqslant 0}$ converge. On a bien montré que X était compact.

Exercice : Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$ est un compact.