> **Théorème** (Théorème d'approximation de Weierstrass)
>
> Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbf{R}$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales sur $[a, b]$ telle que (P_n) converge uniformément vers f, c'est-à- dire : $\|f - P_n\|_{\infty,[a,b]} \to 0$.

Partie I - Fonctions sur $[0, 1]$

Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ continue.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction polynomiale :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Justifier que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2$.
4. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant Cn$, pour une constante $C > 0$ à préciser.

On fixe $\varepsilon > 0$.

5. Justifier l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$,

$$|x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Pour $x \in [0, 1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :

$$X = \left\{k \in \{0, 1, \dots, n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha\right\} \text{ et } Y = \left\{k \in \{0, 1, \dots, n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}.$$

6. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

   où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

7. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

Partie II - Une autre preuve avec des probabilités

On propose une autre preuve basée sur des probabilités. On conserve les notations de la partie I. En particulier, on fixe $\varepsilon > 0$ et le réel $\alpha > 0$ qui s'en déduit par la question 5).

On considère de plus un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Pour tout $x \in [0,1]$, on considère une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivantes toutes la loi de Bernoulli de paramètre x.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

8. Montrer que $\mathbf{E}(f(S_n/n) - f(x)) = B_n(x) - f(x)$.
9. Montrer que $\mathbf{E}\big(\mathbf{1}_{(|S_n - nx| \leqslant n\alpha)} |f(S_n/n) - f(x)|\big) \leqslant \varepsilon$.
10. Montrer que
$$\mathbf{E}\big(\mathbf{1}_{(|S_n - nx| > n\alpha)} |f(S_n/n) - f(x)|\big) \leqslant 2\|f\|_\infty \mathbf{P}(|S_n - nx| > n\alpha)$$
11. En déduire que
$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$$
12. Conclure sur le fait que la suite $(B_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f.

Partie III - Cas général

13. Déduire le cas général du cas des fonctions sur $[0,1]$.