Partie I - Fonctions sur $[0,1]$

1. Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}$. D'après, la formule du binôme de Newton.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1$$

2. Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $y \in \mathbf{R}$, la formule du binôme donne

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

En dérivant (par rapport à x) on a

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} y^{n-k} = n(x+y)^{n-1}$$

En multipliant par x et en prenant $y = 1-x$ on obtient bien

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$$

De plus la formule est aussi vraie pour $n = 0$.

3. La encore la formule est clairement vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Pour le cas général, on repart de la formule obtenue au début de la question précédente. En dérivant deux fois on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} y^{n-k} = n(n-1)(x+y)^{n-2}$$

et donc, en multipliant par x^2 et en posant $y = 1-x$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k} (1-y)^{n-k} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k} (1-y)^{n-k} = n(n-1)x^2$$

En écrivant $k^2 = k(k-1)+k$ et en utilisant la question précédente, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2$$

4. Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2nx\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + n^2x^2 \\
&= nx + n(n-1)x^2 - 2(nx)^2 + n^2x^2 \\
&= nx(x-1)
\end{aligned}$$

On sait que la fonction $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $x = \frac{1}{2}$. On peut donc poser $C = \frac{1}{4}$ et on a

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}$$

5. La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ (qui est donc compact). D'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

6. Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
|B_n(x)-f(x)| &= \left| \left(\sum_{k\in[\![0,n]\!]} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) - f(x) \right| \\
&= \left| \sum_{k\in[\![0,n]\!]} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right| \text{ d'après 1)} \\
&\leqslant \sum_{k\in X} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| + \sum_{k\in Y} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{k\in X} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k\in Y} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \left(\left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + |f(x)| \right) \\
&\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k\in Y} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

La dernière ligne vient du fait que

$$\sum_{k\in X} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sum_{k\in[\![0,n]\!]} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

7. On remarque alors que

$$\sum_{k\in Y} (k-nx)^2 \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sum_{k\in[\![0n]\!]} (k-nx)^2 \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}$$

Donc, par définition de Y, si $k \in Y$, $\dfrac{(k-nx)^2}{n^2\alpha^2} \geqslant 1$ d'où

$$\sum_{k\in Y} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n^2\alpha^2} \sum_{k\in Y} (k-nx)^2 \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4\alpha n}$$

Il existe donc un entier N tel que, pour $n \geqslant N$, $\frac{1}{4\alpha n} \leqslant \varepsilon$ et donc $|B_n(x)-f(x)| \leqslant 2\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $x \in [0,1]$,

$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

On vient donc de montrer que $(B_n) \xrightarrow{\|.\|_\infty} f$.

Partie II - Fonctions sur $[0,1]$ - avec probabilités

8. Les variables X_k sont indépendantes donc $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,x)$. Par transfert on a donc

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(f(S_n/n)-f(x)) &= \left(\sum_{k=0}^{n} f(k/n)\mathbf{P}(S_n=k)\right)-f(x)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right)-f(x)\\ &= B_n(x)-f(x)\end{aligned}$$

9. Notons $Y=\mathbf{1}_{(|S_n-nx|\leqslant n\alpha)}|f(S_n/n)-f(x)|$. On voit que $0\leqslant Y\leqslant\varepsilon$. En effet pour tout $\omega\in\Omega$,
   - Si $|S_n(\omega)-nx|\leqslant n\alpha$ alors $\left|\frac{S_n(\omega)}{n}-x\right|\leqslant\alpha$ et donc
   $$Y(\omega)=|f(S_n/n)-f(x)|(\omega)\leqslant\varepsilon$$
   - Si $|S_n(\omega)-nx|>n\alpha$, $Y(\omega)=0\leqslant\varepsilon$.

   Par croissance de l'espérance,
   $$\mathbf{E}\big(\mathbf{1}_{(|S_n-nx|\leqslant n\alpha)}|f(S_n/n)-f(x)|\big)\leqslant\mathbf{E}(\varepsilon)=\varepsilon$$

10. On pose $Z=\mathbf{1}_{(|S_n-nx|>n\alpha)}|f(S_n/n)-f(x)|$ alors $0\leqslant Z\leqslant 2\|f\|_\infty\mathbf{1}_{(|S_n-nx|>n\alpha)}$. Là encore, par croissance de l'espérance,
$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_{(|S_n-nx|>n\alpha)}|f(S_n/n)-f(x)|)\leqslant 2\|f\|_\infty\mathbf{E}(\mathbf{1}_{(|S_n-nx|>n\alpha)})=2\|f\|_\infty\mathbf{P}(|S_n-nx|>n\alpha)$$

11. On voit que
$$|B_n(x)-f(x)|=|\mathbf{E}(f(S_n/n)-f(x))|\leqslant\mathbf{E}(|f(S_n/n)-f(x)|)\leqslant\varepsilon+2\|f\|_\infty\mathbf{P}(|S_n-nx|>n\alpha)$$
Or, $\mathbf{E}(S_n)=nx$ donc, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,
$$\mathbf{P}(|S_n-nx|>n\alpha)\leqslant\frac{\mathbf{V}(S_n)}{n^2\alpha^2}=\frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2}\leqslant\frac{1}{4n\alpha^2}$$
car $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$.
On en déduit que
$$|B_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon+\frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$$

12. En procédant comme à la fin de la question 7, on a bien que $(B_n)\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

Partie III - Cas général

13. Soit f une fonction continue sur $I=[a,b]$. Soit $u:t\mapsto a+t(b-a)$ qui est une fonction continue de $[0,1]$ dans $[a,b]$. La fonction $g=f\circ u$ est continue sur $[0,1]$. Il existe donc (P_n) qui converge uniformément vers g sur $[0,1]$. Soit $v=u^{-1}:x\mapsto\dfrac{1}{b-a}(x-a)$ qui est un polynôme. On pose $Q_n:x\mapsto P_n(v(x))$ qui est donc une suite de fonctions polynômiales. Pour tout $x\in[a,b]$,
$$|f(x)-Q_n(x)|=|f(u(v(x)))-P_n(v(x))|=|g(v(x))-P_n(v(x))|\leqslant\|g-P_n\|_{\infty,[0,1]}$$
On en déduit que
$$\|f-Q_n\|_{\infty,[a,b]}\leqslant\|g-P_n\|_{\infty,[0,1]}\to 0$$
Finalement la suite (Q_n) converge uniformément vers g sur $[a,b]$.