Partie I - Fonctions L et P

1. Soit $z \in D$. Pour $n \geqslant 1$, $\left|\frac{z^n}{n}\right| = o(|z|^n)$. Or $\sum\limits_{n \geqslant 0} |z|^n$ est une série géométrique absolument convergente car $|z| \in]-1,1[$. On en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ est absolument convergente donc convergente.

   Quand $z \in]-1,1[$, on a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \boxed{-\ln(1-z)}$.

2. Soit $z \in D$. On pose
$$\Phi : t \mapsto L(tz) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} t^n$$
   La fonction Φ est donc la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est supérieur ou égal à $\frac{1}{|z|} > 1$ car pour $t < \frac{1}{|z|}$, $|zt| < 1$ et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n} t^n$ est absolument convergente.
   La fonction Φ est donc dérivable car $\mathscr{C}^\infty$ sur $[-1,1] \subset]-\frac{1}{|z|}, \frac{1}{|z|}[$. Par dérivation terme à terme, pour $t \in [-1,1]$,
$$\Phi'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n t^{n-1} = z \sum_{n=0}^{\infty} (zt)^n = \boxed{\frac{z}{1-tz}}$$

3. Soit $z \in D$. La fonction Ψ est dérivable sur $[0,1]$ car $t \mapsto (1-tz)$ et Φ le sont. De plus pour $t \in [0,1]$,
$$\Psi'(t) = -ze^{L(tz)} + (1-tz) \cdot \frac{z}{1-tz} \cdot e^{L(tz)} = 0$$
   On en déduit que Ψ est constante sur $[0,1]$.
   En particulier,
$$(1-z)e^{L(z)} = \Psi(1) = \Psi(0) = e^{L(0)} = e^0 = 1$$
   On en déduit que : $\boxed{\exp(L(z)) = \frac{1}{1-z}}$.

4. Soit $z \in D$,
$$|L(z)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} = -\ln(1-|z|)$$
   Pour $z \in D$ fixé, $|z|^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc $-\ln(1-|z|^n) \sim |z|^n$. On en déduit que $|L(z^n)| = O(|z|^n)$. Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |z|^n$ converge puisque $|z| < 1$, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} L(z^n) \text{ est absolument convergente}}$ donc convergente.

Dans la suite, on notera, pour z dans D : $P(z) := \exp\left[\sum\limits_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right]$.

5. Soit $z \in D$. Par continuité de exp,

$$\begin{aligned}
P(z) &= \exp\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} L(z^n)\right)\\
&= \lim_{N\to\infty}\exp\left(\sum_{n=1}^{N} L(z^n)\right)\\
&= \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\exp\left(L(z^n)\right)\\
P(z) &= \boxed{\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{1-z^n}}
\end{aligned}$$

Partie II - Développement de P en série entière

Pour $(n,N) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1,\dots,a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} ka_k = n$.

6. Soit $n \in \mathbf{N}$.
   $(n,0,\dots,0) \in P_{n,N}$ donc $\boxed{P_{n,N} \text{ est non vide}}$.
   Soit $(a_1,\dots,a_N) \in P_{n,N}$. Alors pour tout $k \in [\![1,N]\!]$ on a :$0 \leqslant a_k \leqslant ka_k \leqslant \sum_{i=1}^{N} ia_i = n$ donc $P_{n,N}$ est $\boxed{\text{inclus dans } [\![0,n]\!]^N}$.

On note dans la suite $p_{n,N}$ le cardinal de $P_{n,N}$.

7. Soit $n \in \mathbf{N}$.
   Pour tout $N \geqslant 1$ on a :
   $$P_{n,N}\times\{0\} \subset P_{n,N+1}$$
   d'où
   $$p_{n,N}\times 1 \leqslant p_{n,N+1}$$
   Donc la suite $(p_{n,N})_{N\geqslant 1}$ est $\boxed{\text{croissante}}$.
   Pour $N \geqslant \max(n,1)$ l'inclusion précédente est une égalité car si $(a_1,\dots,a_{N+1}) \in P_{n,N+1}$ alors $(N+1)a_{N+1} \leqslant n \leqslant N < N+1$ donc $a_{N+1} < 1$ et ainsi $a_{N+1} = 0$.
   Donc $p_{n,N}.1 = p_{n,N+1}$
   Ainsi la suite $(p_{n,N})_{N\geqslant 1}$ est $\boxed{\text{constante à partir du rang } \max(n,1)}$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N\geqslant 1}$.

8. Soit $N \in \mathbf{N}^*$.
   $\forall z \in D,\quad \dfrac{1}{1-z^N} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{Nk} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N} z^n.$
   avec $\boxed{a_{n,N} = \mathbf{1}_{N|n} = \begin{cases} 1 & \text{si } N|n \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$
   Soit $z \in D$. Montrons par récurrence que pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$.
   initialisation : Pour $N = 1$ on a
   $$\forall z \in D,\quad \prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-z^k} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,1} z^n$$

car $p_{n,1} = \mathrm{card}\Big(\{(n)\}\Big) = 1$.
hérédité : soit $N \in \mathbf{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang N. Alors pour tout $z \in D$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1-z^k} &= \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n\Big).\Big(\sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{1}_{N+1|p}\Big) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{n,\, q \geqslant 0, \\ n+q=r}} p_{n,N} \mathbf{1}_{N+1|q} z^r \quad \text{par produit de Cauchy de séries entières} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{de rayon de convergence au moins 1} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{n,\, q \geqslant 0, \\ n+k(N+1)=r}} p_{n,N} z^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} p_{r,N+1} z^r
\end{aligned}$$

car

$$P_{r,N+1} = \bigsqcup_{\substack{n,\, q \geqslant 0, \\ n+k(N+1)=r}} P_{n,N} \times \{k\}$$

Donc $\boxed{\text{la propriété est vraie à tout ordre par récurrence}}$.

9. On fixe $\ell \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1[$.
Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Comme pour tout, n, $p_{n,N} \geqslant 0$ et que $x \geqslant 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{\ell} p_{n,N} x^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,N} x^n = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-x^k}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient Ainsi

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leqslant \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-x^k} = P(x)}$$

Comme la série $\sum_{n \geqslant 0} p_n x^n$ est à termes positifs et que la suite de ses sommes partielles est majorée, cette série converge. Notant R_p le rayon de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n z^n$ on a donc :

$$\forall x \in [0,1[\quad x \leqslant R_p$$

Par passage à la limite quand $x \to 1^-$ (ou en utilisant que $R_p = \sup\{x \geqslant 0 \ t.q. \ \sum p_n x^n \text{ converge}\}$) il vient $1 \leqslant R_p$.
Par ailleurs pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $p_n \geqslant p_{n,1} = \mathrm{card}\{(n)\} = 1 \geqslant 0$ donc $R_p \leqslant R_{(1)_{n \geqslant 0}} = 1$.
Donc $\boxed{R_p = 1}$.

10. Soit $z \in D$.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |p_n - p_{n,N}|.|z|^n \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} (p_n - p_{n,N})|z|^n \\
&\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} p_n|z|^n
\end{aligned}$$

car $0 \leqslant p_{n,N} \leqslant p_n$ avec égalité si $N \geqslant n$.
Or la série $\sum_{n\geqslant 0} p_n z^n$ converge absolument car $|z| < R_p = 1$. Donc $\sum_{n=N}^{\infty} p_n|z|^n \underset{N\to\infty}{\to} 0$.
Par limite par encadrement, $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n \underset{N\to\infty}{\to} 0$
Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n \underset{N\to\infty}{\to} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$
Par ailleurs,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} \underset{N\to\infty}{\to} P(z)$$

Donc par unicité de la limite,

$$\boxed{P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n}$$

11. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P\left(e^{-t+i\theta}\right) d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{-kt} e^{ik\theta} d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{-kt} e^{i(k-n)\theta} d\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{-kt} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta
\end{aligned}$$

par le théorème d'intégration terme à terme, qu'on peut appliquer car $\sum_{k\geqslant 0} |p_k| e^{-kt} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{i(k-n)\theta}| d\theta = \sum_{k\geqslant 0} |p_k| e^{-kt} 2\pi$ converge car $|e^{-t}| < 1 = R_p$.
Or $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = n \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Ainsi

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} P\left(e^{-t+i\theta}\right) d\theta = 2\pi p_n e^{-nt}}$$

Partie III - Contrôle de P

12. Soient $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| &= \left|\exp(L(xe^{i\theta})-L(x))\right| \\
&= \exp\big(Re\big(L(xe^{i\theta})-L(x)\big)\big) \quad \text{car pour } a,b \text{ réels, } e^{a+ib} \text{ a pour module } e^a \\
&= \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} Re(x^n(e^{in\theta}-1)/n)\Big) \\
&= \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}(\cos(n\theta)-1)\Big) \\
&\leqslant \boxed{\exp\big(x(\cos(\theta)-1)\big)}
\end{aligned}$$

par croissance de exp et car $\cos(n\theta)-1 \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant 2$ et $x \geqslant 0$.
En multipliant les inégalités obtenues pour $(x,\theta) \in \{(x,\theta),(x^2,2\theta),\ldots,(x^N,N\theta)\}$ et en passant à la limite quand $N \to \infty$ dans les inégalités larges, on obtient par continuité de l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| &\leqslant \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\cos(n\theta)-1)x^n\right) \\
&= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\cos(n\theta)-1)x^n\right) \quad \text{car } \cos 0 = 1 \\
&= \exp\left(-\frac{1}{1-x}+\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n e^{in\theta})\right)\right) \\
&= \boxed{\exp\left(-\frac{1}{1-x}+\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right)}
\end{aligned}$$

13. Soient $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. Montrer que :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x}-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) &= \frac{1}{1-x}-\mathrm{Re}\left(\frac{1-xe^{-i\theta}}{(1-xe^{i\theta})(1-xe^{-i\theta})}\right) \\
&= \frac{1}{1-x}-\frac{1-x\cos\theta}{1+x^2-2x\cos\theta} \\
&= \frac{1+x^2-2x\cos\theta-(1-x\cos\theta-x+x^2\cos\theta)}{(1-x)(1+x^2-2x\cos\theta)} \\
&= \frac{x(x-\cos\theta+1-x\cos\theta)}{(1-x)(1+x^2-2x\cos\theta)} \\
&\geqslant \boxed{\frac{x(-\cos\theta+1)}{(1-x)(1+x^2-2x\cos\theta)}}
\end{aligned}$$

car $x-x\cos\theta = x(1-\cos\theta) \geqslant 0$ (et x et le dénominateur sont positifs)
On vérifie aisément que le dernier facteur du dénominateur est égal à $(1-x)^2+2x(1-\cos\theta)$

On a donc par croissance de exp :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp(\frac{-x(1-\cos\theta)}{(1-x)((1-x)^2+2x(1-\cos\theta))}$$

Supposons que $1 > x \geqslant \frac{1}{2}$.
Dans le cas où $x(1-\cos(\theta)) \geqslant (1-x)^2$, on a :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(\frac{-x(1-\cos\theta)}{(1-x)3x(1-\cos\theta)}\right) = \boxed{\exp\left(\frac{-1}{3(1-x)}\right)}$$

et dans le cas contraire on a :

$$\left|\frac{P\left(xe^{i\theta}\right)}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(\frac{-x(1-\cos\theta)}{(1-x)3(1-x)^2}\right) \leqslant \boxed{\exp\left(\frac{-(1-\cos\theta)}{6(1-x)^3}\right)}$$

14. La fonction $\theta \mapsto \begin{cases} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} & \text{si } \theta \neq 0 \\ 1/2 & \text{sinon} \end{cases}$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$ donc continue sur le segment $[-\pi, \pi]$.
Par conséquent elle atteint sa borne inférieure sur ce segment.
Comme elle est à valeurs strictement positives, son minimum, qu'on note α, est strictement positif.
Ainsi il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\boxed{\forall\theta \in [-\pi, \pi], \quad 1-\cos(\theta) \geqslant \alpha\theta^2}$$

(l'inégalité est triviale quand $\theta = 0$)
Lorsque $\frac{1}{2} \leqslant e^{-t} < 1$, c'est-à-dire quand $0 < t < \ln 2$, et lorsque $\theta \in [-\pi, \pi]$, on peut donc majorer $\left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right|$ par

$$\exp\left(\frac{-1}{3(1-e^{-t})}\right) \quad \text{ou} \quad \exp\left(\frac{-\alpha\theta^2}{6(1-e^{-t})^3}\right)$$

De plus par convexité de la fonction exponentielle, $e^{-t} \geqslant 1-t$ donc $0 < 1-e^{-t} < t$
Ainsi on obtient une des majorations voulues en posant :

$$\boxed{t_0 = \ln 2, \quad \gamma = \pi^{-2/3}, \quad \beta = \frac{\alpha}{6}}$$

15.

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)} \mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| d\theta \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-\beta(t^{-3/2}\theta)^2} + e^{-\gamma(t^{-3/2}|\theta|)^{2/3}}) d\theta$$

Or par le changement de variable $u = t^{-3/2}\theta$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\beta(t^{-3/2}\theta)^2} d\theta = \int_{-\pi t^{-3/2}}^{\pi t^{-3/2}} e^{-\beta u^2} t^{3/2} du \leqslant t^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta u^2} du$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\gamma(t^{-3/2}|\theta|)^{2/3}} d\theta \leqslant t^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|u|^{2/3}} du$$

(on vérifie aisément que les deux intégrales aux membres de droite convergent)

On en déduit que

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| d\theta \leqslant Kt^{3/2}$$

où K est la somme des deux intégrales aux membres de droite.
Donc

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}} \frac{P\left(e^{-t}e^{i\theta}\right)}{P\left(e^{-t}\right)}\mathrm{d}\theta = O_{t\to 0^+}(t^{3/2})}$$

Partie IV - Conclusion

16. On admet que

$$\ln\left(P\left(e^{-t}\right)\right) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1).$$

Posons $t_n = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ (qui tend vers 0^+ quand $n \to +\infty$).
On obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\frac{P(e^{-t_n}e^{i\theta})}{P(e^{-t_n})}d\theta = O_{n\to+\infty}(n^{-3/4})$$

D'autre part, d'après la formule admise,

$$P(e^{-t_n}) = e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}}\sqrt{t_n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{o(1)} \sim Ke^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}}\frac{1}{n^{1/4}}$$

où K est une constante strictement positive.
Comme

$$p_n = \frac{e^{nt_n}}{2\pi}P(e^{-t_n})\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\frac{P(e^{-t_n+i\theta})}{P(e^{-t_n})}\mathrm{d}\theta$$

on obtient

$$\begin{aligned} p_n &= e^{\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}} O\left(e^{\pi\sqrt{n}/\sqrt{6}}\frac{1}{n^{1/4}}\right)O(n^{-3/4}) \\ &= O\left(e^{\frac{2\pi\sqrt{n}}{\sqrt{6}}}\frac{1}{n^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}\right) \\ &= \boxed{O\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right)}. \end{aligned}$$