Partie I - Généralités

1) a) Soit P et Q deux polynômes, PQ est encore un polynôme donc, par linéarité, $x \mapsto P(x)Q(x)\delta(x)$ est intégrable d'après la condition *iii)* et donc $(P|Q)$ est correctement défini. Vérifions les axiomes des produits scalaires.
   - Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $(P|Q) = (Q|P)$ par commutativité du produit.
   - Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto (P|Q)$ est linéaire d'après la linéarité de l'intégrale. Par symétrie on en déduit que $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est bilinéaire.
   - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in J$, $P^2(x)\delta(x)$ est positif d'après la condition *ii)*. Par positivité de l'intégrale, $(P|P) \geqslant 0$.
   - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que $(P|P) = 0$. Comme J n'est pas réduit à un point que que $x \mapsto P^2(x)\delta(x)$ est positive et **continue** (condition *i)*) on en déduit que pour tout x dans J, $P^2(x)\delta(x) = 0$ et donc $P(x) = 0$ (condition *ii)*). De ce fait la fonction polynomiale associée à P a une infinité de racines donc P est le polynôme nul.

   Finalement $\boxed{(P, Q) \mapsto (P|Q) \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$

   b) Soit P, Q et R sont trois polynômes,

$$(RP|Q) = \int_J (RP)(x)Q(x)\delta(x)dx = \int_J P(x)(R(x)Q(x))\delta(x)dx = (P|RQ).$$

2) Montrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que

(A1) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ le terme de plus haut degré de P_i est X^i.

(A2) pour tout (i, j) dans $\mathbb{N}^2$, $i \neq j \Rightarrow (P_i|P_j) = 0$

On pourra montrer par récurrence que pour tout entier n, la suite finie $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ existe et est unique.

Montrons par récurrence que pour tout entier n il existe une unique suite de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ vérifiant les conditions

$(\mathrm{A1}_n)$ Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ le terme de plus haut degré de P_i est X^i.

$(\mathrm{A2}_n)$ Pour tout (i, j) dans $[\![0, n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow (P_i|P_j) = 0$.

$(\mathrm{A3}_n)$ La suite $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Initialisation : Pour $n = 0$, on pose $P_0 = 1$. Il vérifie bien les conditions $(\mathrm{A1}_0)$, $(\mathrm{A2}_0)$ et $(\mathrm{A3}_0)$. De par $(\mathrm{A1}_0)$, c'est le seul.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n et on veut la démontrer au rang $n + 1$. On sait qu'il existe une unique suite $(P_0, \ldots, P_n)$ vérifiant les conditions $(\mathrm{A1}_n)$, $(\mathrm{A2}_n)$ et $(\mathrm{A3}_n)$.

  Si $(Q_0, \ldots Q_n, Q_{n+1})$ est une suite finie vérifiant les conditions $(\mathrm{A1}_{n+1})$, $(\mathrm{A2}_{n+1})$ et $(\mathrm{A3}_{n+1})$, par restriction des quantificateurs, la suite $(Q_0, \ldots Q_n)$ vérifie $(\mathrm{A1}_n)$ et $(\mathrm{A2}_n)$ c'est donc une famille libre (comme sous-famille d'une famille libre) de $n + 1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ donc elle vérifie aussi $(\mathrm{A3}_n)$. Par unicité, on en déduit que $\forall i \in [\![0, n]\!], P_i = Q_i$. De plus, $Q_{n+1} = X^{n+1} + R_{n+1}$ où $R_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après $(\mathrm{A3}_n)$ il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$Q_{n+1} = X^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i.$$

  Maintenant, la condition $(\mathrm{A2}_{n+1})$ implique que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $0 = (Q_{n+1}|Q_i) = (X^{n+1}|Q_i) + \lambda_i(Q_i|Q_i)$. C'est-à-dire $\lambda_i = -\dfrac{(X^{n+1}|Q_i)}{(Q_i|Q_i)}$ où le dénominateur n'est pas nul car $(Q_i|Q_i) > 0$.

  Finalement la seule suite finie $(Q_0, \ldots Q_n, Q_{n+1})$ vérifiant les conditions $(\mathrm{A1}_{n+1})$, $(\mathrm{A2}_{n+1})$ et $(\mathrm{A3}_{n+1})$ est définie par

$$\begin{cases} Q_i = P_i & \text{si } i \leqslant n \\ Q_{n+1} = X^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \dfrac{(X^{n+1}|P_i)}{(P_i|P_i)} P_i & \end{cases}$$

Réciproquement, cette suite vérifie les conditions ($A1_{n+1}$) et ($A2_{n+1}$) par construction. De plus, c'est une famille orthogonale de polynômes non nuls. Elle est donc libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ en tant que famille libre de $n+2$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n+2$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

On construit donc ainsi une suite infinie $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui vérifie les conditions (A1), (A2) et (A3).

3) Soit n un entier et Q un polynôme de degré d strictement inférieur à n. D'après la propriété (A3), on peut décomposer Q dans la base $(P_0,\dots,P_d)$: $Q=\lambda_0P_0+\cdots+\lambda_dP_d$. On a alors

$$(Q|P_n)=\sum_{i=0}^{d}\lambda_i(P_i|P_n)=0$$

car la famille (P_i) est orthogonale.

4) On fixe $n\geqslant 2$.

a) D'après la propriété (A1) le polynôme P_n-XP_{n-1} est de degré au plus $n-1$ (car les coefficients dominants s'annulent). Ils se décompose donc dans la base $(P_0,\dots,P_{n-1})$. On en déduit qu'il existe des réels $C_{n,0};C_{n,1};\dots;C_{n,n-1}$ tels que

$$P_n-XP_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n,k}P_k$$

c'est-à-dire

$$P_n=(X+C_{n,n-1})P_{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}C_{n,k}P_k.$$

b) Soit $k\in[\![0,n-3]\!]$.

$$0=(P_n|P_k)=(XP_{n-1}|P_k)+\sum_{i=0}^{n-1}C_{n,i}(P_i|P_k)=(XP_{n-1}|P_k)+C_{n,k}(P_k|P_k).$$

Maintenant, $(XP_{n-1}|P_k)\underset{\text{question }1.b}{=}(P_{n-1}|XP_k)\underset{\text{question 3}}{=}0$. Donc $\boxed{C_{n,k}=0}$.

c) Le calcul précédent affirme que $C_{n,n-2}(P_{n-2}|P_{n-2})=-(XP_{n-1}|P_{n-2})=-(P_{n-1}|XP_{n-2})$. Maintenant, $P_{n-1}-XP_{n-2}$ est de degré inférieur ou égal à $n-2$ car le coefficient dominant s'annule, on peut donc écrire, $XP_{n-2}=P_{n-1}+Q$ où $\deg(Q)\leqslant n-1$. On en déduit alors, que

$$(P_{n-1}|XP_{n-2})=(P_{n-1}|P_{n-1}+Q)=(P_{n-1}|P_{n-1})+(P_{n-1}|Q)\underset{\text{question 3}}{=}(P_{n-1}|P_{n-1}).$$

Finalement $\boxed{C_{n,n-2}=-\dfrac{(P_{n-1}|P_{n-1})}{(P_{n-2}|P_{n-2})}}$. Comme le produit scalaire est défini et positif et que $P_{n-1}\neq 0$ on a bien que $\boxed{C_{n,n-2}<0.}$

On pose dans ce qui suit $\boxed{\alpha_n=C_{n,n-1}}$ et $\boxed{\beta_n=-C_{n,n-2}}$ et on a donc

$$P_n=(X+\alpha_n)P_{n-1}-\beta_nP_{n-2}$$

où $\beta_n>0$.

5) L'objet de cette question est l'étude de la réalité des zéros de P_n lorsque $n\geqslant 1$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on désigne par E_n l'ensemble des zéros de P_n réels appartenant à $\mathring{J}$ et d'ordre de multiplicité impair.

a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Si E_n était vide, P_n n'aurait que des zéros complexes ou de multiplicité paire. On pourrait de factoriser en

$$P_n=\delta\prod_{i=1}^{s}(X-\alpha_i)^{2p_i}\times\prod_{j=1}^{r}(X^2-\beta_jX+\gamma_j)$$

où le premier produit provient des (éventuelles) racines réelles de multiplicité paire et le deuxième des (éventuelles) racines complexes. En particulier, P_n serait de signe constant. Or on a $(P_0|P_n) = \int_J P_n(x)\delta(x) = 0$. Comme $P_n\delta$ est de signe constant et continue, pour tout x dans J, $P_n(x)\delta(x) = 0$ et donc $P_n = 0$. C'est absurde. On en déduit que $\boxed{E_n \text{ n'est pas vide.}}$

b) Soit donc $E_n = \{u_1, \dots, u_m\}$ où $1 \leqslant m \leqslant n$ avec $u_1 < u_2 < \cdots < u_m$. On pose $S = \prod_{k=1}^{m}(X - u_k)$. On peut donc écrire

$$P_n = \delta \prod_{i=1}^{s}(X-\alpha_i)^{2p_i} \times \prod_{j=1}^{r}(X^2 - \beta_j X + \gamma_j) \times \prod_{k=1}^{m}(X-u_k)^{2q_k+1}$$

on en déduit que

$$P_n S = \delta \prod_{i=1}^{s}(X-\alpha_i)^{2p_i} \times \prod_{j=1}^{r}(X^2 - \beta_j X + \gamma_j) \times \prod_{k=1}^{m}(X-u_k)^{2q_k+2}$$

garde un signe constant et n'est pas nul donc

$$(S|P_n) = \int_J S(x)P_n(x)\delta(x)dx$$

n'est pas nul. On en déduit que S n'est pas de degré strictement inférieur à P (qui est de degré n). Comme S ne peut pas être de degré supérieur à P_n on a $\boxed{m = \deg(S) = n}$.

c) Le polynôme P_n étant de degré n. Il a n zéros (éventuellement complexes) comptés avec multiplicité. On vient de voir que $\#E_n = n$. Donc P_n a n zéros réels dans $\mathring{J}$ de multiplicité impair. Il n'a donc pas d'autres zéros et de plus ils sont tous simples/

6) On note a et b (dans $\overline{\mathbb{R}}$) les bornes de J. Soit $n \geqslant 2$. On note $\mathscr{H}_n$ le prédicat : « si on note $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ les zéros de P_n avec $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$, $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ ceux de P_{n-1} avec $v_1 < v_2 < \cdots < v_{n-1}$ alors, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $u_i < v_i < u_{i+1}$ ». Procédons par récurrence.

— Initialisation : Pour $n = 2$ on sait que $P_1 = X - v_1$ et $P_2 = (X - u_1)(X - u_2)$. On utilise que $P_2 = (X + \alpha_2)P_1 - \beta_2$ où $\beta_2 > 0$. En particulier, $P_2(v_1) = -\beta_2 < 0$. Comme $\lim_{a^+} P_2 > 0$ et $\lim_{b^-} P_2 > 0$, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires (P_2 est continue), on en déduit P_2 s'annule sur $]a, v_1[$ et sur $]v_1, b[$ et donc on a bien $u_1 < v_1 < u_2$.

— Hérédité : Pour $n \geqslant 2$. On suppose $\mathscr{H}_n$ et on veut montrer $\mathscr{H}_{n+1}$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, d'après $\mathscr{H}_n$, $P_{n-1}(v_i) = (v_i - u_1)\dots(v_i - u_i)\dots(v_i - u_{n-1})$ est du signe de $(-1)^{n-i}$ (les $i-1$ premiers facteurs dans le produit précédent sont strictement positifs et les $n-i$ derniers sont strictement négatifs). D'après la relation $P_{n+1} = (X + \alpha_{n+1})P_n - \beta_{n+1}P_{n-1}$ on en déduit que $P_{n+1}(v_i)$ est du signe de $(-1)^{n-i+1}$. De plus, comme P_{n+1} s'écrit $(X - w_1)\dots(X - w_{n+1})$ avec $a < w_1 < \dots < w_{n+1} < b$, $\lim_a P_{n+1}$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et $\lim_b P_{n+1}$ est strictement positive. De ce fait, par le théorème des valeurs intermédiaires, P_{n+1} s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]a, v_1[,\ ]v_1, v_2[, \dots,]v_n, b[$. On a ainsi les $n+1$ racines et donc $a < w_1 < v_1 < w_2 < \dots < v_n < w_{n+1} < b$, ce qu'il fallait démontrer.

Partie II - Polynômes de Laguerre

7) La fonction δ vérifie les conditions *i)* et *ii)*. De plus pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus $x^n e^{-x} = \underset{+\infty}{o}(\frac{1}{x^2})$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $x \mapsto x^n e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. La condition *iii)* est vérifiée.

8) On pose, si $n \in \mathbb{N}$: $f_n : x \mapsto x^n e^{-x}$ et $\lambda_n = (-1)^n$. On considère alors la fonction

$$\Pi_n : x \mapsto \lambda_n e^x f_n^{(n)}(x).$$

a) On a $\boxed{\Pi_0 : x \mapsto 1\,;\, \Pi_1 : x \mapsto x-1}$. De plus pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f_2^{(2)} = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + x^2e^{-x}$ d'après la formule de Leibniz. On en déduit que $\boxed{\Pi_2 : x \mapsto x^2 - 4x + 2}$.

b) Soit n un entier naturel. On pose $u : x \mapsto x^n$. D'après la formule de Leibniz

$$f_n^{(n)} = (u\delta)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}\delta^{(n-k)}$$

On en déduit que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}(-1)^{n-k}e^{-x}$$

Finalement,

$$\Pi_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n!)^2}{((n-k)!)^2 k!} x^{n-k}.$$

La fonction Π_n est bien polynomiale de degré n et, si on note $\Pi_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}X^{n-k}$, on a :

$$\boxed{a_{n,k} = (-1)^k \frac{(n!)^2}{((n-k)!)^2 k!}}.$$

c) i) On utilise comme ci-dessus la formule de Leibniz. Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} u^{(k)}(x)\delta^{(p-k)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}(-1)^{p-k}e^{-x}.$$

On en déduit que $f_n^{(p)}(0) = 0$ car, dans la somme ci-dessus, $n - k > 0$ car $k \leqslant p < n$.

ii) On déduit de la formule ci-dessus que $f_n^{(p)} \underset{+\infty}{\sim} \binom{p}{0}\frac{n!}{n!}x^n(-1)^pe^{-x} = (-1)^p x^n e^{-x}$.

iii) Soit $i < j$,

$$(\Pi_i|\Pi_j) = (-1)^j \int_0^{+\infty} f_j^{(j)}(x)\Pi_i(x)dx$$

On intègre par parties en intégrant $f_j^{(j)}$ et en dérivant Π_i. On a alors

$$(\Pi_i|\Pi_j) = (-1)^j \left(\left[f_j^{(j-1)}(x)\Pi_i(x) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f_j^{(j-1)}(x)\Pi_i'(x)dx \right).$$

Le terme « entre crochet » est nul d'après 8.c.i et 8.c.ii on a donc

$$(\Pi_i|\Pi_j) = (-1)^{j+1} \int_0^{+\infty} f_j^{(j-1)}(x)\Pi_i'(x)dx.$$

On peut alors itérer le procédé $i+1$ fois (ce qui est possible car $i < j$ donc l'ordre de dérivation de f_j reste positif ou nul) et on obtient que

$$(\Pi_i|\Pi_j) = (-1)^{j+i+1} \int_0^{+\infty} f_j^{(j-i-1)}(x)\Pi_i^{(i+1)}(x)dx.$$

Mais comme Π_i est de degré i, $\Pi_i^{(i+1)} = 0$ et donc $\boxed{(\Pi_i|\Pi_j) = 0}$.

d) On a montré que la famille de polynôme (Π_i) vérifiant les conditions (A1) (en effet $a_{n,0} = 1$), (A2) d'après la question précédente. On en déduit alors qu'elle vérifie aussi (A3). Par unicité on a bien que pour tout entier n, $\Pi_n = P_n$.

9) On a $P_1 = \Pi_1 = X - 1$. Il a un unique zéro en $v_1 = 1$. On a aussi $P_2 = \Pi_2 = X^2 - 4X + 2$. Ses zéros sont $u_1 = \dfrac{4-\sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2} < 1$ et $u_2 = 2 + \sqrt{2}$. On a bien que P_1 et P_2 ont que des zéros simples et qu'ils se trouvent dans $]0, +\infty[$. De plus on vérifie bien que $u_1 < v_1 < u_2$.

10) On pose $K_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

On sait que K_n est bien définie d'après la question 7). Ensuite, on procède par intégration par parties :

$$K_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \left[-x^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx.$$

On obtient donc que $K_n = nK_{n-1}$. Par récurrence, on obtient que $K_n = n!K_0$. Or $K_0 = 1$. Finalement $\boxed{K_n = n!}$.

11) $(P_n|P_n) = \int_0^\infty \lambda_n f_n^{(n)}(x) P_n(x) dx$. Intégrant n fois par parties, d'après 8)c), tous les crochets sont nuls. On obtient

$$(P_n|P_n) = (-1)^n \int_0^\infty \lambda_n f_n(x) P_n^{(n)}(x) dx$$

Or P_n est de degré n et coefficient dominant 1, donc $P_n^{(n)} = n!$. De plus $\lambda_n = (-1)^n$.
Ainsi

$$(P_n|P_n) = n! \int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n! K_n = \boxed{(n!)^2}$$

12) a) Selon la question 4)c), $\beta_n = -C_{n,n-2} = (P_{n-1}|P_{n-1})/(P_{n-2}|P_{n-2})$. Par la question précédente, on a donc

$$\boxed{\beta_n = (n-1)^2}$$

b) Evaluant en 0 la relation rappelée par l'énoncé,

$$P_n(0) = \alpha_n P_{n-1}(0) - \beta_n P_{n-2}(0)$$

Or pour tout naturel n, $P_n(0) = a_{n,n} = (-1)^n \dfrac{(n!)^2}{((n-n)!)^2 n!} = (-1)^n n!$ (cf question 8)b)).

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} (-1)^n n! & = & \alpha_n (-1)^{n-1}(n-1)! - (n-1)^2 (-1)^{n-2}(n-2)! \\ n(n-1) & = & -\alpha_n (n-1) - (n-1)^2 \end{array}$$

$$\boxed{\alpha_n = -(2n-1)}$$

13) On note $(b_{n,k})$ les coefficients de X^n dans la base $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$, c'est-à-dire :

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} P_{n-k}.$$

a) La famille (P_i) étant orthogonale, $(X^n|\ P_{n-k}) = b_{n,k}(P_{n-k}|P_{n-k})$. Donc

$$b_{n,k} = \frac{(X^n|P_{n-k})}{(P_{n-k}|P_{n-k})} = \frac{(X^n|P_{n-k})}{((n-k)!)^2}$$

Or, en procédant par intégration par parties successives (les crochets convergent et valent 0 comme à la question 8.c.iii)

$$\begin{array}{rcl} (X^n|P_{n-k}) & = & (-1)^{n-k} \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f_{n-k}^{(n-k)}(x) dx \\ & = & (-1)^{n-k-1} n \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1} f_{n-k}^{(n-k-1)}(x) dx \\ & = & \cdots \\ & = & n(n-1)\cdots(k+1) \displaystyle\int_0^{+\infty} x^k f_{n-k}(x) dx \\ & = & \dfrac{n!}{k!} \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \\ & = & \dfrac{(n!)^2}{k!} \end{array}$$

Finalement $b_{n,k} = \dfrac{(n!)^2}{k!((n-k)!)^2}$

b) On a $b_{n,k} = |a_{n,k}|$.

c) En utilisant la formule ci-dessus, $b_{n,0} = \dfrac{(n!)^2}{0!(n!)^2} = 1$. C'est prévisible car X^n et P_n sont unitaires de degré n et que, pour $k > 0$, $\deg(P_{n-k}) < n$.