On désigne par J un intervalle de $\mathbb{R}$ qui peut, selon le cas, être de la forme $[a, b]$ $(a < b)$, $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$. On désigne alors par $\mathring{J}$ l'intérieur de J.
On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré au plus n.
Par abus de langage, on identifie, lorsque c'est utile, un polynôme P, élément de $\mathbb{R}[X]$, et la fonction polynomiale associé sur J car J est infini.
On désigne par δ une application de J dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

i) La fonction δ est continue sur J.

ii) Pour tout x dans J, $\delta(x) > 0$.

iii) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $x \mapsto x^n\delta(x)$ est intégrable sur J.

En particulier, si $J = [a, b]$, la propriété *iii)* est une conséquence de *i)*.
Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose :

$$(P|Q) = \int_J P(x)Q(x)\delta(x)dx.$$

Si f est une fonction dérivable à l'ordre n, sa dérivée d'ordre n est notée $f^{(n)}$; par convention $f^{(0)} = f$. Ainsi, la dérivée première sera notée indifféremment f' ou $f^{(1)}$ et la dérivée seconde f'' ou $f^{(2)}$.

Partie I - Généralités

1) a) Montrer que $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   b) Montrer que si P, Q et R sont trois polynômes, $(RP|Q) = (P|RQ)$.
2) Montrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que
   (A1) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ le terme de plus haut degré de P_i est X^i.
   (A2) Pour tout (i, j) dans $\mathbb{N}^2$, $i \neq j \Rightarrow (P_i|P_j) = 0$.
   (A3) Pour tout entier n, $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   On pourra montrer par récurrence que pour tout entier n, la suite finie $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ existe et est unique.
3) Montrer que pour tout entier n et tout polynôme Q de degré d strictement inférieur à n, $(P_n|Q) = 0$.
4) On fixe $n \geqslant 2$.
   a) Montrer l'existence de n réels $C_{n,0}; C_{n,1}; \ldots; C_{n,n-1}$ tels que

   $$P_n = XP_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n,k}P_k = (X + C_{n,n-1})P_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} C_{n,k}P_k.$$

   b) Soit $k \in [\![0, n-3]\!]$. En calculant $(P_n|P_k)$ montrer que $C_{n,k} = 0$. *On pourra utiliser les questions 1.b et 3.*
   c) Exprimer $C_{n,n-2}$ à l'aide de $(P_{n-1}|P_{n-1})$ et de $(P_{n-2}|P_{n-2})$. En déduire que $C_{n,n-2} < 0$.

   On pose dans ce qui suit $\alpha_n = C_{n,n-1}$ et $\beta_n = -C_{n,n-2}$ et on a donc

   $$P_n = (X + \alpha_n)P_{n-1} - \beta_nP_{n-2}$$

   où $\beta_n > 0$.
5) L'objet de cette question est l'étude des zéros de P_n lorsque $n \geqslant 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par E_n l'ensemble des zéros réels de P_n appartenant à $\mathring{J}$ et d'ordre de multiplicité impair.
   a) En considérant $(P_0|P_n)$, montrer que E_n est non vide. *On pourra étudier le signe de P_n sur J en supposant E_n vide.*

b) Soit donc $E_n = \{u_1, \dots, u_m\}$ où $1 \leqslant m \leqslant n$ avec $u_1 < u_2 < \cdots < u_m$. On pose $S = \prod_{k=1}^{m} (X - u_k)$.
En considérant $(S|P_n)$, montrer que $m = n$.

c) Déduire de ce qui précède que les zéros de P_n sont tous réels, simples et appartiennent à $\mathring{J}$.

6) On suppose $n \geqslant 2$. On note $u_1, u_2, \dots, u_n$ les zéros de P_n avec $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$ et $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ ceux de P_{n-1} avec $v_1 < v_2 < \cdots < v_{n-1}$.
Montrer, en utilisant la question 4 que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$u_i < v_i < u_{i+1}.$$

On pourra raisonner par récurrence sur n.

Partie II - Polynômes de Laguerre

Dans cette partie, $J = [0, +\infty[$ et on pose : $\forall x \in J, \delta(x) = e^{-x}$.
L'objet de cette partie est d'expliciter, avec cette densité particulière, la suite des polynômes P_n définie à la partie I.

7) Vérifier que δ satisfait aux conditions imposées à une densité.

8) On pose, si $n \in \mathbb{N}$: $f_n : x \mapsto x^n e^{-x}$ et $\lambda_n = (-1)^n$. On considère alors la fonction

$$\Pi_n : x \mapsto \lambda_n e^x f_n^{(n)}(x).$$

a) Donner les expressions de Π_0, Π_1 et Π_2.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, Π_n est une fonction polynomiale de degré n. On pose

$$\Pi_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^{n-k}.$$

En utilisant la formule de Leibniz, calculer $a_{n,k}$. On l'exprimera en fonction de $(-1)^k, n!, k!$ et $(n-k)!$.

c) i) Montrer que pour tout $p < n$, $f_n^{(p)}(0) = 0$.

ii) Donner un équivalent de $f_n^{(p)}(x)$ quand x tend vers $+\infty$ (n et p fixés avec $p < n$).

iii) À l'aide d'intégrations par parties, calculer $(\Pi_i|\Pi_j)$ pour $i < j$.*On déconseille d'utiliser les expressions explicites des coefficients de* Π_n.

d) En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $P_n = \Pi_n$

9) Calculer les zéros de P_1 et P_2 et constater que les résultats des questions 5 et 6 sont vérifiées.

10) On pose $K_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$. Calculer K_n en fonction de n.

11) Calculer $(P_n|P_n)$.

12) On rappelle les notations de la partie I : $P_n = (X + \alpha_n)P_{n-1} - \beta_n P_{n-2}$.

a) Calculer explicitement β_n.

b) Calculer α_n. *On pourra évaluer la relation précédente en une valeur particulière.*

13) On note $(b_{n,k})$ les coefficients de X^n dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$, c'est-à-dire :

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} P_{n-k}.$$

a) Calculer $b_{n,k}$ à l'aide de $n!, k!$ et $(n-k)!$.

b) Comparer $b_{n,k}$ et $|a_{n,k}|$.

c) Vérifier que $b_{n,0} = 1$. Etait-ce prévisible ?