Exercice I

Soit n un entier naturel non nul. Soit $\mathbb{K}$ un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on pose $\mathbb{K}[A]X = \{P(A)X \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.
Une matrice carrée A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite cyclique si et seulement si il existe une matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}[A]X$. Une telle colonne X est appelée une colonne A-génératrice.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices cycliques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour toute colonne X de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ on note $\varphi_X : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi_X : M \mapsto \mathrm{Det}(X, MX, \ldots, M^{n-1}X).$$

1) a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Justifier que $\mathbb{K}[A]X = \mathsf{Vect}(X, AX, \ldots, A^{n-1}X)$.
   b) Pour tout $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$,
   montrer que $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ est cyclique. Ainsi $\mathscr{C} \neq \emptyset$.
2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que X est une colonne A-génératrice si et seulement si $\varphi_X(A) \neq 0$.
3) a) Soit A un élément de $\mathscr{C}$ et X une colonne A-génératrice.
   Montrer que $\mathscr{C}$ est un voisinage de A.
   On pourra commencer par justifier que φ_X est continue.
   b) Qu'en déduire concernant $\mathscr{C}$?
4) a) Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $A \in \mathscr{C}$. Posons pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $M_\lambda = (1-\lambda)A + \lambda B$.
   Soit X une colonne A-génératrice.
   Montrer que M_λ appartient à $\mathscr{C}$ pour tout λ dans $\mathbb{K}$ privé d'un ensemble fini.
   On pourra considérer $\theta_X : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par $\theta_X : \lambda \mapsto \varphi_X(M_\lambda)$.
   b) En déduire que $\mathscr{C}$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice II

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et K un compact de E.
On considère une application $f : K \to K$.
On suppose que pour tous $x, y \in K$, $\|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$.

1) On fixe $\varepsilon > 0$ et $x \in K$.
   a) Montrer que $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \neq q$ et $\|f^p(x) - f^q(x)\| \leqslant \varepsilon$.
   b) En déduire qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $\|f^k(x) - x\| \leqslant \varepsilon$.
2) En travaillant dans K^2, montrer de même que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall (x,y) \in K^2 \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \|f^k(x) - x\| \leqslant \varepsilon \text{ et } \|f^k(y) - y\| \leqslant \varepsilon$$

3) En déduire que f est une isométrie, c'est-à-dire que

$$\forall (x,y) \in K^2 \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

4) Montrer que f est bijective.

Pour la surjectivité, on pourra commencer par montrer que $f(K)$ est dense dans K.