

Exercice

1. Soit X une variable aléatoire discrète. On pose $f : x \mapsto e^{tx}$. D'après le cours $e^{tX} = f(X)$ est une variable aléatoire discrète.

On suppose de plus que X est bornée par un réel α . Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$|e^{tX(\omega)}| \leq e^{|t||X(\omega)|} \leq e^{\alpha|t|}$$

On en déduit que e^{tX} est d'espérance finie.

2. a) La fonction $\phi : u \mapsto e^u$ est de classe \mathcal{C}^2 et $\phi'' : u \mapsto e^u$. Cela montre que $\phi'' \geq 0$ et donc ϕ est convexe.

- b) Soit $x \in [-1, 1]$, posons $\lambda = \frac{1+x}{2} \in [0, 1]$. On a $1 - \lambda = \frac{1-x}{2}$.

Par convexité de ϕ ,

$$\lambda\phi(t) + (1 - \lambda)\phi(-t) \geq \phi(\lambda t + (1 - \lambda) \times (-t))$$

Comme $\lambda t + (1 - \lambda) \times (-t) = t \times \frac{1+x}{2} - t \times \frac{1-x}{2} = tx$, on a :

$$e^{tx} \leq \lambda e^t + (1 - \lambda) e^{-t}$$

- c) En utilisant ce qui précède, $e^{tX} \leq \frac{1+X}{2} e^t + \frac{1-X}{2} e^{-t}$.

Par croissance de l'espérance,

$$L_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX}) \leq e^t \mathbf{E}\left(\frac{1+X}{2}\right) + e^{-t} \mathbf{E}\left(\frac{1-X}{2}\right) = \text{ch}(t) + \frac{e^t - e^{-t}}{2} \mathbf{E}(X)$$

Comme X est centrée, $L_X(t) \leq \text{ch}(t)$.

- d) D'après le cours,

$$\text{ch}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \exp\left(\frac{u^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{2^n \times n!}$$

- e) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \times n! \leq (2n)!$.

— Initialisation. Pour $n = 0$, $2^0 \times 0! = 1 \leq 0!$.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $2^n \times n! \leq (2n)!$. On a alors

$$2^{n+1} \times (n+1)! = 2 \times (n+1) \times 2^n \times n! \leq (2n)! \times (2n+2) \leq (2n+2)!$$

Par récurrence, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \times n! \leq (2n)!$.

- f) En utilisant les question 2.c) et 2.d) on obtient que

$$L_X(t) \leq \text{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \times n!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

3. a) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On pose $Y_i = \frac{X_i}{\alpha_i}$. La variable aléatoire Y_i est bornée et centrée. En utilisant la question 2.f),

$$L_{X_i}(t) = \mathbf{E}(e^{tX_i}) = \mathbf{E}(e^{t\alpha_i Y_i}) = L_{Y_i}(t\alpha_i) \leq \exp\left(\frac{\alpha_i^2 t^2}{2}\right)$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_{S_n}(t) = \mathbf{E}(e^{tS_n}) = \mathbf{E}(e^{tX_1} \cdots e^{tX_n}) \stackrel{\text{indep.}}{=} \mathbf{E}(e^{tX_1}) \cdots \mathbf{E}(e^{tX_n}) = \prod_{i=1}^n L_{X_i}(t)$$

En effet les variables $e^{tX_1}, \dots, e^{tX_n}$ sont indépendantes par le lemme des coalitions. En utilisant la question 3.a)

$$L_{S_n}(t) \leq \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{\alpha_i^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2} \beta_n\right)$$

c) Comme $x \mapsto e^{tx}$ est croissante, pour $\omega \in \Omega$, si $S_n(\omega) \geq \varepsilon$ alors $e^{tS_n} \geq e^{t\varepsilon}$. On en déduit que

$$(S_n \geq \varepsilon) \subset (e^{tS_n} \geq e^{t\varepsilon})$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \mathbf{P}(e^{tS_n} \geq e^{t\varepsilon})$$

Comme la variable aléatoire e^{tS_n} est positive, par l'inégalité de Markov,

$$\mathbf{P}(e^{tS_n} \geq e^{t\varepsilon}) \leq \frac{\mathbf{E}(e^{tS_n})}{e^{t\varepsilon}} = \frac{L_{S_n}(t)}{e^{t\varepsilon}}$$

Finalement, en utilisant la question précédente,

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{L_{S_n}(t)}{e^{t\varepsilon}} \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2} \beta_n\right)$$

4. Notons $h : t \mapsto -t\varepsilon + \frac{t^2}{2} \beta_n$. Elle est dérivable et $h'(t) = -\varepsilon + t\beta_n$. La fonction h atteint son minimum en $t = \frac{\varepsilon}{\beta_n}$. On peut donc appliquer le résultat de la question 3.c avec $t = \frac{\varepsilon}{\beta_n}$ et on obtient

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\beta_n} \times \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2\beta_n^2} \times \beta_n\right) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\beta_n}\right)$$

Problème

Partie I

1. a) Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$. Le polynôme P appartient à $\text{Ker}(\varphi_k)$ si et seulement si $P(0) = P(1) = \dots = P(n) = 0$. On en déduit que P a au moins $n+1$ racines. Comme P est de degré au plus $k \leq n$, P est le polynôme nul. On a donc $\boxed{\text{Ker}(\varphi_k) = \{0\}}$. On en déduit que φ_k est injective.
 - b) On utilise le théorème du rang qui affirme que $\text{rg}(\varphi_k) = \dim(\mathbb{R}_k[X]) - \dim(\text{Ker}(\varphi_k))$. D'après ce qui précède, $\text{rg}(\varphi_k) = \dim(\mathbb{R}_k[X]) = k+1$.
 - c) On a montré que φ_k est injectif. De plus, il est surjectif si et seulement $k+1 = n+1$. Finalement $\boxed{\varphi_k \text{ est un isomorphisme si et seulement si } k = n}$.
2. a) D'après la question 1.c) l'application φ_n est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans \mathbb{R}^{n+1} . De ce fait $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ a un unique antécédent par φ_n ce qui signifie qu'il existe un unique polynôme Y tel que $\varphi_n(Y) = (y_0, \dots, y_n)$ c'est-à-dire tel que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Y(i) = y_i$.
 - b) Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on peut poser $x_0 = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = \dots = x_n = 0$ et $x_j = 1$. En appliquant la question précédente, il existe un unique polynôme $L_j \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_j(i) = x_i = \delta_{i,j}$.
 - c) On reconnaît la base des polynômes de Lagrange. On voit que c'est une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Il suffit donc de montrer que c'est une famille libre. Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ des scalaires tels que $\lambda_0 L_0 + \dots + \lambda_n L_n = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. En évaluant en $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on obtient

$$\sum_{j=0}^n \lambda_j L_j(i) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}(i) \iff \lambda_i = 0$$

Cela montre que la $\boxed{\text{famille } (L_0, \dots, L_n) \text{ est libre ; c'est donc une base}}$.

- d) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On le décompose dans la base \mathcal{L} : $P = \sum_{j=0}^n \lambda_j L_j$. En évaluant en $0, 1, \dots$ on obtient que pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(j) = \lambda_j L_j(j) = \lambda_j$. On a donc $\boxed{P = \sum_{j=0}^n P(j) L_j}$.
3. On suppose que $k = n$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta(P) = \sum_{i=0}^n (y_i - P(i))^2 \geq 0$. De plus pour le polynôme Y défini ci-dessus, $\Delta(Y) = 0$. On en déduit que m_0 existe et vaut 0.

Partie II

4. Montrons que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
 - Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $\langle P | Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(i)Q(i) = \langle Q | P \rangle$.
 - Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit Q_1, Q_2 dans $\mathbb{R}_n[X]$ et λ_1, λ_2 dans \mathbb{R} .

$$\langle P | \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 \rangle = \sum_{i=0}^n P(i)(\lambda_1 Q_1(i) + \lambda_2 Q_2(i)) = \lambda_1 \langle P | Q_1 \rangle + \lambda_2 \langle P | Q_2 \rangle$$

On en déduit que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est linéaire à droite et donc bilinéaire par symétrie.

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P | P \rangle = \sum_{i=0}^n P(i)^2 \geq 0$.

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose que $\langle P|P \rangle = \sum_{i=0}^n P(i)^2 = 0$. C'est une somme de nombres positifs qui est nulle. On en déduit que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(i)^2 = 0$ et donc $P(i) = 0$. Le polynôme P a donc au moins $n+1$ racines, comme il est de degré au plus n , c'est le polynôme nul.
- On a bien montré que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

5. a) Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$,

$$\langle L_i | L_j \rangle = \sum_{k=0}^n L_i(k) L_j(k) = L_j(i) = 0$$

La deuxième égalité venant du fait que $L_i(k) = 0$ si $k \neq i$. La famille \mathcal{L} est donc orthogonale. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\|L_i\| = \sqrt{\langle L_i | L_i \rangle} = \sqrt{\sum_{k=0}^n L_i^2(k)} = 1$$

Cela montre que \mathcal{L} est une famille orthonormée.

- b) On voit que

$$\langle 1|1 \rangle = \sum_{i=0}^n 1 = \boxed{n+1} \text{ et } \langle 1|X \rangle = \sum_{i=0}^n 1 \times i = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

- c) Montrons par récurrence que pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, $S_N = \sum_{p=1}^N p^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$. Le cas $N = 1$ est évident. Supposons que la propriété est vraie pour un entier $N \geq 1$ et démontrons-la pour $N+1$.

$$S_{N+1} = S_N + (N+1)^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 = \frac{(N+1)(N(2N+1) + 6(N+1))}{6}$$

Or $N(2N+1) + 6(N+1) = 2N^2 + 7N + 6 = (N+2)(2N+3)$. On en déduit que

$$S_{N+1} = \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}$$

Cela achève la récurrence.

On en déduit que

$$\langle X|X \rangle = \sum_{i=0}^n i^2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

6. a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\|Y - P\|^2 = \langle Y - P | Y - P \rangle = \sum_{i=0}^n (Y(i) - P(i))^2 = \sum_{i=0}^n (y_i - P(i))^2 = \Delta(P)$$

- b) On voit que

$$\min\{\Delta(P) \text{ , } P \in \mathbb{R}_k[X]\} = \min\{\|Y - P\|^2 \text{ , } P \in \mathbb{R}_k[X]\} = (d(P, \mathbb{R}_k[X]))^2$$

Il existe donc un unique polynôme P_k qui est le projeté orthogonal de Y sur $\mathbb{R}_k[X]$ tel que $m_k = \|Y - P_k\|^2 = \Delta(P_k)$.

En particulier, $Y - P_k$ appartient à l'orthogonal de $\mathbb{R}_k[X]$.

- c) On cherche $P_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ tel que $Y - P_0$ soit orthogonal à $\mathbb{R}_0[X] = \text{Vect}(1)$. On pose $P_0 = a1$. Il doit vérifier que $\langle Y - P_0 | 1 \rangle = 0$ c'est-à-dire $\langle P_0 | 1 \rangle = \langle Y | 1 \rangle$. Or $\langle P_0 | 1 \rangle = a \langle 1 | 1 \rangle = (n+1)a$ et $\langle Y | 1 \rangle = \sum_{i=0}^n y_i$. Finalement $P_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n y_i$.

De plus comme $Y - P_0 \perp P_0$, $\|Y\|^2 = \|P_0\|^2 + \|Y - P_0\|^2$ ce qui implique

$$m_0 = \|Y - P_0\|^2 = \|Y\|^2 - \|P_0\|^2 = \sum_{i=0}^n y_i^2 - \frac{1}{(n+1)^2} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2$$

- d) On voit que

$$\langle Y | 1 \rangle = \sum_{i=0}^n y_i = q - q = \boxed{0} \text{ et } \langle Y | X \rangle = \sum_{i=0}^n iy_i = \sum_{i=0}^{q-1} i - \sum_{i=q}^{2q-1} i = \frac{(q-1)q}{2} - \frac{q(3q-1)}{2} = \boxed{-q^2}$$

On calcule le projeté orthogonal P_1 de Y sur $\mathbb{R}_1[X]$. On pose $P_1 = aX + b$. En procédant comme ci-dessus, on obtient que a, b vérifie le système

$$\begin{cases} a \langle X | 1 \rangle + b \langle 1 | 1 \rangle = \langle Y | 1 \rangle \\ a \langle X | X \rangle + b \langle 1 | X \rangle = \langle Y | X \rangle \end{cases}$$

C'est-à-dire le système

$$\begin{cases} \frac{n(n+1)}{2}a + (n+1)b = 0 \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}a + \frac{n(n+1)}{2}b = -q^2 = -\frac{(n+1)^2}{4} \end{cases}$$

Il est équivalent à

$$\begin{cases} na + 2b = 0 \\ 2n(2n+1)a + 6nb = -3(n+1) \end{cases}$$

On en déduit que $a = -\frac{3(n+1)}{n(n+2)}$ et $b = \frac{3(n+1)}{2(n+2)}$.

Finalement $\boxed{P_1 = -\frac{3(n+1)}{n(n+2)}X + \frac{3(n+1)}{2(n+2)} = -\frac{3(n+1)}{2n(n+2)}(2X - n)}$

Partie III

7. Comme $\dim(\mathbb{R}_k[X]) = k+1$ et que $\dim(\mathbb{R}_{k-1}[X]) = k$, $\dim(F_k) = 1$.
8. a) Soit $R \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. D'après la condition ii), (B_0, \dots, B_{k-1}) est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ donc il existe une famille de scalaires $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq k-1}$ telle que $R = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i X^i$. La famille (B_0, \dots, B_k) étant

orthogonale on obtient que $\boxed{\langle B_k | R \rangle = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \langle B_k | B_i \rangle = 0}$

De même, par définition du projeté orthogonal $X^k - Q_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$ donc $\boxed{\langle X^k - Q_k | R \rangle = 0}$.

On vient de monter que B_k et $X^k - Q_k$ appartiennent à F_k qui est de dimension 1. Les deux polynômes sont donc colinéaires.

- b) La question précédente montre qu'une si une famille (B_0, \dots, B_n) vérifie les trois conditions alors $B_0 = 1$ et pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_k = \binom{2k}{k}(X^k - Q_k)$.

Réiproquement cette famille vérifie les conditions i) et iii) de manière évidente. De plus si $0 \leq k < k' \leq n$ alors $B_k \in \mathbb{R}_k[X] \subset \mathbb{R}_{k'-1}[X]$ et $B_{k'} \in \mathbb{R}_{k'-1}[X]^\perp$. On en déduit que $\langle B_k | B_{k'} \rangle = 0$. La condition ii) est vérifiée puisque de plus une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre et donc (B_0, \dots, B_k) est une base de $\mathbb{R}_k[X]$.

- c) On procède comme à la fin de la partie II pour calculer Q_1 et Q_2 .

Le polynôme Q_1 est le projeté orthogonal de X sur $\mathbb{R}_0[X] = \text{Vect}(1)$. Il est de la forme $Q_1 = a1$.

De plus $X - Q_1 \perp 1$ ce qui implique que $\langle X | 1 \rangle - a\langle 1 | 1 \rangle = 0 \iff \frac{n(n+1)}{2} - a(n+1) = 0$.

On obtient $\boxed{Q_1 = \frac{n}{2}}$ puis $\boxed{B_1 = \binom{2}{1}(X - Q_1) = 2X - n}$.

De même, le polynôme Q_2 est le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$. Il est de la forme $Q_2 = aX + b$. De plus $X^2 - Q_2 \perp 1$ et $X^2 - Q_2 \perp X$ ce qui implique que

$$\begin{cases} \langle 1 | X \rangle a + \langle 1 | 1 \rangle b = \langle 1 | X^2 \rangle \\ \langle X | X \rangle a + \langle X | 1 \rangle b = \langle X | X^2 \rangle \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 3na + 6b = n(2n+1) \\ (4n+2)a + 6b = 3n(n+1) \end{cases}$$

En résolvant le système on obtient $a = n$ et $b = -\frac{n(n-1)}{6}$. Ce qui donne que $\boxed{Q_2 = nX - \frac{n(n-1)}{6}}$

et donc $\boxed{B_2 = 6X^2 - 6nX + n(n-1)}$.

9. Soit $R \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, on pose $U = B_k(n - X)$. On a

$$\langle U | R \rangle = \sum_{i=0}^n U(i)R(i) = \sum_{i=0}^n B_k(n-i)R(i) \underset{j=n-i}{=} \sum_{j=0}^n B_k(j)R(n-j) = \langle B_k | S \rangle = 0$$

car $S = R(n - X) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$.

On en déduit que $U \in F_k$. Cet espace étant de dimension 1, $B_k(n - X)$ est colinéaire à B_k . Comme de plus son coefficient dominant est $(-1)^k$, on obtient que $\boxed{B_k(n - X) = (-1)^k B_k(X)}$.

10. a) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $C_k = \frac{B_k}{\|B_k\|}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la famille (C_0, \dots, C_k) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_k[X]$. Le polynôme P_k étant le projeté orthogonal sur $\mathbb{R}_k[X]$ du polynôme Y ,

$$P_k = \sum_{i=0}^k \langle Y | C_i \rangle C_i = \sum_{i=0}^k \frac{\langle Y | B_i \rangle}{\langle B_i | B_i \rangle} B_i$$

- b) On en déduit que

$$P_k = \sum_{i=0}^k \frac{\langle Y | B_i \rangle}{\|B_i\|^2} B_i = P_{k-1} + \frac{\langle Y | B_k \rangle}{\|B_k\|^2} B_k$$

De même $Y = P_n = \sum_{i=0}^n \frac{\langle Y | B_i \rangle}{\|B_i\|^2} B_i$ donc $m_k = \|Y - P_k\|^2 = \sum_{i=k+1}^n \frac{\langle Y | B_i \rangle^2}{\|B_i\|^2}$. On en déduit que

$$\boxed{m_k = m_{k-1} - \frac{\langle Y | B_k \rangle^2}{\|B_k\|^2}}$$

11. a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $XB_k \in \mathbb{R}_{k+1}[X]$. On peut le décomposer dans la base (B_0, \dots, B_{k+1}) donc

$$\text{il existe } (\lambda_j)_{0 \leq j \leq k+1} \text{ tels que } \boxed{XB_k = \sum_{j=0}^{k+1} \lambda_j B_j}$$

$$\text{Par la même méthode que ci-dessus, } \boxed{\lambda_j = \frac{\langle XB_k | B_j \rangle}{\|B_j\|^2}}$$

b) Soit P, Q et R des polynômes tels que PQ et QR sont de degré au plus n .

$$\langle PQ | R \rangle = \sum_{i=0}^n P(i)Q(i)R(i) = \langle P | QR \rangle$$

c) Soit $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, k-2 \rrbracket$.

$$\langle XB_k | B_j \rangle = \langle B_k | XB_j \rangle = 0$$

La dernière égalité vient du fait que $\deg(XB_j) = j+1 \leq k-1$.

d) On vient de voir que pour $j \leq k-2$, $\lambda_j = \frac{\langle XB_k | B_j \rangle}{\|B_j\|^2} = 0$. On en déduit que

$$XB_k = \gamma_k B_{k+1} + \beta_k B_k + \alpha_k B_{k-1}$$

e) On sait que le coefficient dominant de XB_k est $\binom{2k}{k}$. Donc $XB_k = \binom{2k}{k} X^{k+1} + R_k$ où $\deg(R_k) \leq k$. De même comme $\deg(B_{k-1}) \leq \deg(B_k) \leq k$. Le coefficient du monôme de degré $k+1$ du polynôme de droite de l'égalité ci-dessus est $\gamma_k \binom{2k+2}{k+1}$.

$$\text{On en déduit que } \boxed{\gamma_k = \frac{\binom{2k}{k}}{\binom{2k+2}{k+1}} = \frac{k+1}{4k+2}}$$

f) On en déduit que $\langle XB_k | B_{k+1} \rangle = \gamma_k \langle B_{k+1} | B_{k+1} \rangle + 0 = \boxed{\frac{k+1}{4k+2} \|B_{k+1}\|^2}$.

g) On a

$$(n-X) \cdot B_k (n-X) = \gamma_k B_{k+1} (n-X) + \beta_k B_k (n-X) + \alpha_k B_{k-1} (n-X)$$

En utilisant le résultat de la question 9) et en divisant par $(-1)^k$ on obtient que

$$(n-X) \cdot B_k = -\gamma_k B_{k+1} + \beta_k B_k - \alpha_k B_{k-1}$$

En ajoutant la relation initiale, on a donc $2\beta_k B_k = nB_k$. On en déduit que $\boxed{\beta_k = \frac{n}{2}}$

h) On voit que

$$\langle XB_k | B_{k-1} \rangle = 0 + 0 + \alpha_k \|B_{k-1}\|^2$$

De plus

$$\langle XB_k | B_{k-1} \rangle = \langle B_k | XB_{k-1} \rangle = \gamma_{k-1} \|B_k\|^2 + \beta_{k-1} \langle B_k | B_{k-1} \rangle + \alpha_{k-1} \langle B_k | B_{k-2} \rangle$$

On en déduit que

$$\alpha_k = \gamma_{k-1} \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} = \frac{k}{4k-2} \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2}$$

En regroupant les résultats on a donc en multipliant par 2,

$$2XB_k = \frac{k+1}{2k+1} B_{k+1} + nB_k + \frac{k}{2k-1} \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} B_{k-1}$$

D'où

$$B_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1} \left((2X-n)B_k - \frac{k}{2k-1} \frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2} B_{k-1} \right)$$